

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Неравновесные колмогоровского типа распределения частиц и их приложения

В.Е. Захаров, В.И. Карась

Представлено современное состояние исследований неравновесных (колмогоровского типа) стационарных и нестационарных распределений частиц, взаимодействующих по закону Кулона с учётом статического экранирования и являющихся точными решениями интегралов столкновений Больцмана или в форме Ландау с источником и стоком, обеспечивающими поток энергии по спектру в импульсном пространстве. Проведён анализ преимуществ нового (основанного на неравновесных распределениях) способа преобразования энергии и неравновесной нестационарной кинетики электрон-фононной системы кристалла в сильном электрическом поле (электропластического эффекта).

PACS numbers: 47.11.-j, 47.27.-i, 47.27.ek, 52.25.Dg

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201301c.0055

Содержание

1. Введение (55).
2. Теоретические исследования стационарных неравновесных функций распределения частиц с потоком по спектру (56).
 - 2.1. Точные решения для интеграла столкновений Ландау.
 - 2.2. Точные решения для интеграла столкновений Больцмана.
 - 2.3. Условия формирования стационарных неравновесных функций распределения частиц в конечных энергетических интервалах.
3. Теоретические исследования нестационарных неравновесных функций распределения частиц с потоком по спектру (60).
 - 3.1. Численное моделирование формирования функций распределения частиц для уравнений типа Ландау–Фоккера–Планка.
 - 3.2. Численное моделирование формирования неравновесных функций распределения частиц для стационарных согласованных источников и стоков.
 - 3.3. Численное моделирование формирования неравновесных функций распределения частиц для нестационарных несогласованных источников и стоков.
 - 3.4. Механизм формирования электронной функции распределения при взаимодействии потоков электромагнитного излучения и быстрых заряженных частиц с твердотельной плазмой.
4. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения частиц (72).

- 4.1. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения электронов эмиссии, индуцируемой лазерным излучением.
- 4.2. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения электронов эмиссии, индуцируемой потоками быстрых ионов.
- 4.3. Прямое преобразование кинетической энергии частиц в электрическую энергию на основе неравновесных распределений частиц.

5. Кинетика электрон-фононной системы кристалла, находящегося в сильном электрическом поле (78).

- 5.1. Кинетическое описание эффекта электропластической деформации.
- 5.2. Математическая модель.
- 5.3. Результаты численного моделирования и их обсуждение.

6. Заключение (83).

Список литературы (84).

1. Введение

В связи с разработкой и широким использованием мощных источников частиц и энергии в настоящее время неуклонно возрастает интерес к неравновесным состояниям разнообразных физических систем.

Впервые А.Н. Колмогоровым [1] в теории турбулентности несжимаемой жидкости в интервале масштабов $2\pi/k$, промежуточных между масштабами возбуждаемых и эффективно затухающих движений, было построено универсальное (не зависящее от структуры источника и стока) стационарное неравновесное распределение энергии по волновым числам ε_k . Известный колмогоровский спектр гидродинамической турбулентности имеет вид

$$\varepsilon_k = AP_1^{2/3}k^{-11/3}, \quad (1.1)$$

где A — постоянная, P_1 — поток энергии по спектру, k — волновое число.

При выводе формулы (1.1) использована гипотеза о локальности турбулентности, т.е. о том, что существенно взаимодействуют между собой только близкие масш-

В.Е. Захаров. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация, Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черногоровка, Московская обл., Российская Федерация
Тел. (499) 132-67-51
E-mail: zakharov@itp.ac.ru

В.И. Карась. Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт" НАН Украины, ул. Академическая 1, 61108 Харьков, Украина
Тел. + 38 (057) 700-11-46. Факс + 38 (057) 335-35-64
E-mail: karas@kipt.kharkov.ua

Статья поступила 23 декабря 2011 г.

табы. Эта гипотеза для случая турбулентности в несжимаемой жидкости (сильной турбулентности и т.п.) не доказана.

В физических системах, в которых взаимодействие волн или частиц можно описать кинетическими уравнениями для волн, квазичастиц или частиц, построение стационарных неравновесных распределений сводится к решению кинетических уравнений. В этом случае локальность стационарного неравновесного распределения отвечает сходимости интеграла столкновений. Универсальные спектры волн, которые являются решениями для интеграла столкновений между волнами, в рамках теории слабой турбулентности были впервые получены В.Е. Захаровым [2].

2. Теоретические исследования стационарных неравновесных функций распределения частиц с потоком по спектру

Термодинамически равновесной функцией распределения электронов в вырожденной или классической плазме в изотропном пространственно-однородном случае является функция распределения Ферми–Дирака или Максвелла, которая представляет собой точное решение соответственно квантового или классического интеграла столкновений Больцмана [3–7]. Для классического (невыврожденного) газа кинетическое уравнение Больцмана имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial t} = & \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 W(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \times \\ & \times [f(\mathbf{p}_2)f(\mathbf{p}_3) - f(\mathbf{p})f(\mathbf{p}_1)] \times \\ & \times \delta(E + E_1 - E_2 - E_3) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $W(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ — вероятность перехода вследствие столкновений, $f(\mathbf{p})$ — функция распределения электронов, \mathbf{p}_l , E_l — импульс и энергия l -го электрона, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Функция распределения, которая удовлетворяет условию

$$f(\mathbf{p}_2)f(\mathbf{p}_3) - f(\mathbf{p})f(\mathbf{p}_1) = 0, \quad (2.2)$$

является стационарным решением уравнения (2.1).

Легко увидеть, что функциональное уравнение (2.2) с учётом законов сохранения энергии и импульса при столкновениях частиц приводит к термодинамически равновесной функции распределения Максвелла.

Вопрос о неравновесной функции распределения малой части электронов, которые релаксируют на основном "фоне" (в этом случае интеграл столкновений можно линеаризовать), с учётом постоянного в импульсном пространстве потока энергии I_1 , возникающего вследствие процессов ионизации и рекомбинации, изучался ранее (см., например, [8]). Близкие вопросы о функции распределения нейтронов в кристаллах рассматривались А.И. Ахизером и И.Я. Померанчуком [9]. В этих случаях функция распределения может заметно отличаться от термодинамически равновесной, но при этом её вид зависит от структуры источника и стока.

Универсальные неравновесные стационарные степенные распределения частиц ($f = Ap^{2s}$), которые являются точными решениями интеграла столкновений

Больцмана, были впервые методом групповой симметрии получены А.В. Кацем, В.М. Контгорвичем, В.Е. Новиковым, С.С. Моисеевым [10, 11]. Для формирования таких распределений необходимо иметь в импульсном пространстве источник и сток частиц или энергии, которые обеспечивают постоянный по спектру поток.

Для определения показателя степени s в случае вероятности перехода, которая является однородной функцией импульсов степени n , естественно под интегралом использовать переменные \mathbf{p}_l/p . Тогда уравнение (2.1) сводится к интегралу, не зависящему от p , и множителю p^{4s+n+4} . Найдём потоки частиц I_0 и энергии I_1 в импульсном пространстве. Потоки определяются через интеграл столкновений следующим образом:

$$\operatorname{div} \left(j_i(\mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}}{p} \right) = -E^i \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}}, \quad (2.3)$$

где $I_i = 4\pi p^2 j_i$, а E — энергия частиц. Решая (2.3), получаем

$$I_i = A^2 \alpha^{i-1} \frac{R(s, n)}{4s + n + 9 + 2(i-1)} p^{4s+n+9+2(i-1)}, \quad (2.4)$$

где $\alpha = \text{const}$, n — показатель однородности вероятности перехода.

Из (2.4) следует, что для s_i , которые удовлетворяют условию

$$\gamma_s = 4s_i + n + 9 + 2(i-1) = 0, \quad i = 0, 1, \quad (2.5)$$

поток I_i либо постоянен в импульсном пространстве, либо равен нулю, если $R(s, n)$ имеет нуль первого порядка при $s = s_i$ (при этом интеграл столкновений равняется нулю). Функция распределения Ap^{2s} отвечает неравновесному стационарному случаю с постоянным потоком энергии или частиц. При этом направление потока определяется знаком производной $dR/d\gamma_s$ при $\gamma_s = 0$, а A определяется выражением

$$A^2 = I_i \alpha^{i-1} \lim_{\gamma_s \rightarrow 0} \left| \frac{dR}{d\gamma_s} \right|^{-1}. \quad (2.6)$$

Покажем непосредственным вычислением [12, 13], что для интегралов столкновений Больцмана и Ландау в случае неравновесных степенных распределений функция $R(s, n)$ удовлетворяет приведённым выше условиям.

2.1. Точные решения для интеграла столкновений Ландау

Хорошо известно, что в случае плазмы интеграл столкновений, описывающий взаимодействие заряженных частиц, может быть записан в форме Ландау (см., например, [3]):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = & -\operatorname{div} \mathbf{j}_0, \quad j_{0i} = \pi e^4 A \int d\mathbf{p}' \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} \times \\ & \times \left[f(\mathbf{p}) \frac{\partial f(\mathbf{p}')}{\partial p'_k} - f(\mathbf{p}') \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_k} \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\mathbf{u} = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')/m$, A — кулоновский логарифм, m и e — масса и заряд электрона. Подстановкой в (2.7) изотропной степенной функции распределения Ap^{2s} после довольно несложных вычислений можно получить следу-

ющее выражение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial t}\right)_{\text{ст}} &= 16\pi^2 m e^4 A A^2 p^{4s} \frac{(4s+3)(4s+5)}{(s+1)(2s+3)(2s+5)} + \\ &+ \frac{16\pi^2 m e^4 A A^2 p^{4s}}{3} \lim_{\substack{p_1 \rightarrow 0 \\ p_2 \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{2s^2}{2s+3} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{2s+3} + \right. \\ &+ \frac{(2s+1)s}{2s+2} \left(\frac{p_2}{p}\right)^{2s+2} - \frac{2s+3}{2} \left(\frac{p_2}{p}\right)^{2s} - \\ &\left. - \frac{(2s-2)s}{2s+5} \left(\frac{p_1}{p}\right)^{2s+5} \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что первое слагаемое интеграла столкновений, т.е. функция $R(s, n)$, действительно содержит множители $4s+5$ и $4s+3$, причём в первой степени. Это обеспечивает, с одной стороны, постоянство потока энергии, а с другой стороны, обращение в нуль интеграла столкновений для показателя степени $s_1 = -5/4$. Что же касается показателя степени $s_0 = -3/4$, то он соответствует нелокальной функции распределения, для которой интеграл столкновений расходится (второй член под знаком предела неограничен).

2.2. Точные решения

для интеграла столкновений Больцмана

Используя выражение для интеграла столкновений Больцмана (2.1) и подставив степенную функцию распределения частиц в виде $A p^{2s}$, с помощью δ -функции, выражающей закон сохранения импульса, проинтегрируем (2.1) по \mathbf{p}_2 . Введя затем вместо $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3$ новые переменные \mathbf{p}_1, \mathbf{q} , запишем интеграл столкновений в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial t} &= -m A^2 \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q} W(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}) \times \\ &\times [|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^{2s} |\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}|^{2s} - |p|^{2s} |p_1|^{2s}] \delta(\mathbf{q}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{q})), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$. Аргумент δ -функции может обратиться в нуль при $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{q} = 0$ или $\mathbf{q}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{q}) = 0$. Первый случай неинтересен, так как соответствует просто перестановке частиц местами в результате столкновения, что обращает в нуль выражение в квадратных скобках (т.е. отвечает условию (2.2)), а значит и $(\partial f/\partial t)_{\text{ст}} = 0$.

Введём углы θ, θ_1 между вектором \mathbf{q} и векторами соответственно \mathbf{p} и \mathbf{p}_1 . После перехода к сферическим координатам в (2.9) для \mathbf{p}_1 и \mathbf{q} , интегрирования при помощи δ -функции по p_1 и перехода к безразмерной переменной \tilde{q} ($\tilde{q} = q/p$) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial t} &= -m A^2 p^{4s+r+4} \int_0^8 \tilde{q} d\tilde{q} \int dO \int dO_1 \tilde{W} \frac{1}{\cos \theta_1} \times \\ &\times \left(\frac{\cos \theta + \tilde{q}}{\cos \theta_1}\right)^2 \left\{ [1 + 2\tilde{q} \cos \theta + \tilde{q}^2]^s \times \right. \\ &\times \left. \left| \left(\frac{\cos \theta + \tilde{q}}{\cos \theta_1}\right)^2 - 2\tilde{q}(\cos \theta + \tilde{q}) + \tilde{q}^2 \right|^s - \left| \frac{\cos \theta + \tilde{q}}{\cos \theta_1} \right|^{2s} \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где r — размерность вероятности W перехода, $dO_i = \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i$.

Найдём поток частиц I_0 и энергии I_1 в импульсном пространстве, учитывая, что в рассматриваемом случае потоки выражаются через интеграл столкновений согласно (2.3). Для вероятности W , являющейся однородной функцией импульсов степени n , $W = C_1 q^n$, где C_1 —

постоянная величина, n — любое вещественное число (при этом $n = r$), интеграл столкновений (2.10) легко интегрируется по $\theta_1, \varphi, \varphi_1$ и записывается как

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} &= \frac{2\pi^2 m C_1 A^2}{s+1} p^{4s+n+4} [J^{(1)} - J^{(2)}], \\ J^{(1)} &= \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty d\tilde{q} \tilde{q}^{n+1} |1 + 2\tilde{q}x + \tilde{q}^2|^s |x|^{2s+2}, \\ J^{(2)} &= \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty d\tilde{q} \tilde{q}^{n+1} |x + \tilde{q}|^{2s+2}, \quad x = \cos \theta. \end{aligned}$$

Интеграл $J^{(2)}$ выражается через бета-функции $B(x, y)$ как

$$\begin{aligned} J^{(2)} &= (2s+3)^{-1} [B(2s+4, n+2) - \\ &- B(-2s-n-5, 2s+4) + B(n+2, -2s-n-5)]. \end{aligned}$$

При вычислении $J^{(1)}$ удобно вначале провести интегрирование по \tilde{q} (см., например, [14]), тогда получим

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= 2^{-(2s+1)/2} \Gamma\left(\frac{1-2s}{2}\right) B(n+2, -n-2s-2) \times \\ &\times \int_0^1 dx x^{2s+2} (1-x^2)^{(2s+1)/4} [P_{n+s+3/2}^{s+1/2}(-x) + P_{n+s+3/2}^{s+1/2}(x)], \end{aligned}$$

где $P_\nu^\mu(x)$ — шаровая функция. Воспользовавшись свойством шаровых функций

$$\begin{aligned} P_\nu^\mu(-x) &= -\frac{\sin(\pi\nu)}{\sin(\pi\mu)} P_\nu^\mu(x) + \\ &+ \frac{\sin(\pi(\nu+\mu)) \Gamma(\nu+\mu+1)}{\sin(\pi\mu) \Gamma(\nu-\mu+1)} P_\nu^{-\mu}(x) \end{aligned}$$

и вычислив интегралы по x , получаем

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= \frac{B(n+2, -n-2s-2)}{2s+3} \left[\left(1 - \frac{\sin(\pi(s+n+3/2))}{\sin(\pi(s+1/2))}\right) \times \right. \\ &\times {}_3F_2\left(\frac{n+2}{2}, -\frac{n+2s+2}{2}, 1; \frac{1-2s}{2}, \frac{2s+5}{2}; 1\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(2s+n+3) \Gamma(1/2-s) \Gamma(s+5/2) \Gamma(s+2)}{2^{2s+1} \Gamma(n+2) \Gamma((4s+n+7)/2) \Gamma((2s-n+3)/2)} \times \\ &\times \left. \frac{\sin(\pi(2s+n+2))}{\sin(\pi(s+1/2))} \right], \end{aligned}$$

где ${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z)$ — гипергеометрическая функция. Таким образом, выражение для функции $R(s, n)$, входящей в частное решение для потока I_i (см. (2.4)), с учётом конкретных формул для $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} R(s, n) &= \frac{-4\pi^3 C_1}{(s+1)(2s+3)} \left\{ B(2s+4, n+2) - \right. \\ &- B(-2s-n-5, 2s+4) + B(n+2, -2s-n-5) - \\ &- \left[B(n+2, -n-2s-2) \left(1 - \frac{\sin(\pi(s+n+3/2))}{\sin(\pi(s+1/2))}\right) \times \right. \\ &\times {}_3F_2\left(\frac{n+2}{2}, -\frac{n+2s+2}{2}, 1; \frac{1-2s}{2}, \frac{2s+5}{2}; 1\right) + \\ &+ \frac{(4s+n+7)(4s+n+9) \pi^2 (2s+1)(2s+3)}{2^{2s+5} \Gamma(-2s) \Gamma((4s+n+11)/2) \Gamma((2s-n+3)/2)} \times \\ &\times \left. \left. \frac{\Gamma(s+2)}{\sin^2(\pi(s+1/2))} \right] \right\}. \end{aligned}$$

В разделе 2.1 мы рассматривали квадратичный закон дисперсии для частиц. Обобщение на произвольный закон дисперсии $E = p^{s_1}/\alpha_1$ (α_1, s_1 — некоторые константы) не приводит ни к каким принципиальным сложностям, хотя выражение для $R(s, n, \alpha_1)$ может быть более громоздким. Что же касается показателя степени s_i в функции распределения частиц, то он для произвольного закона дисперсии определяется выражением

$$s_i = -\frac{n+9+\alpha_1(i-1)}{2\alpha_1}. \quad (2.11)$$

Получено, что локальным неравновесным функциям распределения частиц (интеграл столкновений для них сходится) отвечают показатели степени s , удовлетворяющие условиям:

$$-\frac{3}{2} < s_0 < -1, \quad -\frac{3}{2} < s_1 < -\frac{5}{4}. \quad (2.12)$$

Индексы 0 (1) отвечают I_0 (I_1) = const.

Согласно (2.5), показателям степени из диапазона (2.12) отвечают следующие показатели однородности вероятности перехода:

$$\begin{aligned} -3 < n < -1, \quad I_0 &= \text{const}, \\ -4 < n < -3, \quad I_1 &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.3. Условия формирования стационарных неравновесных функций распределения частиц в конечных энергетических интервалах

В случае кулоновского взаимодействия ($n = -4$), как видно из приведённых неравенств (2.13), интеграл столкновений расходится (известная особенность W для малых переданных импульсов). В работах [10, 11, 15] высказано предположение, а в [12, 13] показано, что эта расходимость устраняется дебаевской экранировкой. Рассмотрим интеграл столкновений (2.10), для вероятности перехода, которая отвечает экранированному кулоновскому потенциалу, $W = 2e^4/(q^2 + a_1^2)^2$ (q — переданный импульс, a_1 — дебаевский импульс) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial t} &= -mA^2 p^{4s} \int_0^\infty \tilde{q} d\tilde{q} \int dO \int dO_1 \frac{2e^4}{(\tilde{q}^2 + a^2)^2} \times \\ &\times \frac{1}{\cos \theta_1} \left(\frac{\cos \theta + \tilde{q}}{\cos \theta_1} \right)^2 \left\{ |1 + 2\tilde{q} \cos \theta + \tilde{q}^2|^s \times \right. \\ &\times \left| \left(\frac{\cos \theta + \tilde{q}}{\cos \theta_1} \right)^2 - 2\tilde{q}(\cos \theta + \tilde{q}) + \tilde{q}^2 \right|^s - \\ &\left. - \left| \frac{\cos \theta + \tilde{q}}{\cos \theta_1} \right|^{2s} \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\tilde{q} = q/p$, $a = a_1/p$.

Проведём интегрирование по углам $\theta_1, \varphi, \varphi_1, \theta$, используя стандартные интегралы [14], и преобразуем (2.14) к сумме двух интегралов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial t} &= \frac{-8\pi^2 m e^4 A^2}{(s+1)(2s+3)} p^{4s} \left\{ \int_0^1 \frac{d\tilde{q} \tilde{q}}{(\tilde{q}^2 + a^2)^2} \left[(1 + \tilde{q}^2)^s \times \right. \right. \\ &\times \left. \left({}_2F_1 \left(-s, 2s+3; 2s+4; -\frac{2\tilde{q}}{1+\tilde{q}^2} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + {}_2F_1 \left(-s, 2s+3; 2s+4; \frac{2\tilde{q}}{1+\tilde{q}^2} \right) \right) - \right. \\ &\left. - (1 + \tilde{q})^{2s+3} - (1 - \tilde{q})^{2s+3} \right] + \int_0^1 \frac{d\tilde{q} \tilde{q}^{-2s-2}}{(\tilde{q}^2 a^2 + 1)^2} \times \\ &\times \left[\tilde{q}^3 (1 + \tilde{q}^2)^s \left({}_2F_1 \left(-s, 2s+3; 2s+4; -\frac{2\tilde{q}}{1+\tilde{q}^2} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + {}_2F_1 \left(-s, 2s+3; 2s+4; \frac{2\tilde{q}}{1+\tilde{q}^2} \right) \right) - \right. \\ &\left. - (1 + \tilde{q})^{2s+3} + (1 - \tilde{q})^{2s+3} \right] \Big\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для получения областей существования степенных функций распределения, соответствующих двум различным асимптотикам вероятности перехода W , следует рассмотреть интеграл столкновений для двух предельных случаев: $a \ll 1$, $a \gg 1$. Вначале для малых значений a ($a \ll 1$) найдём зависимость интеграла столкновений (2.15) от a . Легко увидеть, что основной вклад при этом даёт первый интеграл в выражении (2.15). Проводя разложение подинтегральной функции по степеням \tilde{q} и почленно интегрируя получившийся ряд, находим выражение для интеграла столкновений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial t} &= \frac{8\pi^2 m e^4 A^2}{(s+1)(2s+3)} p^{4s} \left\{ \frac{(4s+3)(4s+5)}{2s+5} \left[\ln a^2 + \right. \right. \\ &+ \frac{(2s+1)(2s+3)(2s+5)\pi^2 \Gamma(s+2)}{2^{2s+5} \Gamma(-2s) \Gamma((2s+7)/2) \Gamma((4s+7)/2) \sin^2(\pi(2s+1)/2)} \Big] + \\ &\left. + K_1(s) a^2 \ln a^2 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Вычисляя поток энергии согласно (2.4), найдём, что поток энергии отрицателен и определяется логарифмическим слагаемым только при $a^2 < 0,005$. В интервале же $0,005 < a^2 < 0,1$ направление потока энергии противоположно (положительно) его направлению при больших импульсах.

Таким образом, показано [12, 13], что на участке импульсного пространства $p \gg a_1$ дебаевская экранировка, во-первых, устраняет кулоновскую расходимость, а во-вторых, не влияет на показатель степени неравновесной стационарной функции распределения частиц с постоянным потоком энергии в импульсном пространстве. Показатель степени этой функции отвечает асимптотике W с показателем степени $n = -4$. Кроме того, установлено, что на некотором участке импульсного пространства направление потока энергии противоположно (положительно) его направлению для больших импульсов. При этом существует локальное степенное распределение, плотность частиц в котором определяется интенсивностью потока. Консервативность же потока обеспечивается источником и стоком, расположение которых должно быть согласовано с найденным его направлением.

Во многих конкретных физических задачах возникает вопрос о формировании, в результате действия в импульсном пространстве источника и стока, степенных распределений частиц в ограниченных энергетических интервалах, которые окружены участками с термодинамически равновесными распределениями частиц. Интеграл электрон-электронных столкновений для твердотельной плазмы вычисляется в приближении квадратичного закона дисперсии. Расходимость, обусловленная кулоновским взаимодействием, устраняется введением,

как и выше, матричного элемента, описывающего экранированное кулоновское взаимодействие. Интеграл столкновений Больцмана в случае квантовой статистики (см., например, [3]) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(\mathbf{p})}{\partial t} = & \frac{2}{(2\pi\hbar)^6} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 W(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \times \\ & \times [\eta(\mathbf{p}_2) \eta(\mathbf{p}_3) (1 - \eta(\mathbf{p})) (1 - \eta(\mathbf{p}_1)) - \eta(\mathbf{p}) \eta(\mathbf{p}_1) \times \\ & \times (1 - \eta(\mathbf{p}_2)) (1 - \eta(\mathbf{p}_3))] \times \\ & \times \delta(E + E_1 - E_2 - E_3) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $W = (2\pi\hbar)^3 2e^4 (|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3|^2 + a_1^2)^{-2}$ — матричный элемент, описывающий экранированное кулоновское взаимодействие, $\eta(\mathbf{p}_i)$ — числа заполнения.

Пусть в инерционном интервале (между источником и стоком) функция распределения электронов степенная, а вне его — термодинамически равновесная (фермиевская), т.е.

$$\eta_i = \eta_s(\mathbf{p}_i), \text{ если } p' \leq |\mathbf{p}_i| \leq p'' \left(\eta_s = \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} \alpha |I_1|^{1/2} p_i^{2s} \right),$$

$$\eta_i = \eta_F(\mathbf{p}_i), \text{ если } p' > |\mathbf{p}_i|, |\mathbf{p}_i| > p'' \left(\eta_F = \left[1 + \exp \frac{p_i^2 - p_F^2}{2mk_B T} \right]^{-1} \right),$$

где α — коэффициент пропорциональности, I_1 — поток энергии, p_F — фермиевский импульс, k_B — постоянная Больцмана, T — температура равновесного газа электронов. Интеграл столкновений вычисляется с целью определения ширины инерционного интервала для степенных распределений η_s , поэтому импульс p , по которому в (2.16) не проводится интегрирование, должен находиться в этом интервале, т.е. $\eta = \eta_s(p)$. Выше было показано, что неравновесная функция распределения может иметь вид $\eta_s = A_1 p^{2s}$ для металла в той области импульсного пространства, где $a_1 < p$, т.е. источник и сток должны быть расположены так, чтобы выполнялись условия $p', p'' > p_F$. При вычислении (2.16) не будем учитывать тепловое размытие функции распределения Ферми, так как его учёт приводит к температурным поправкам, которые в силу условия $T \ll E_F$ (E_F — энергия Ферми) незначительны. Поэтому в качестве η_F можно взять единичные функции (ступеньки)

$$\eta_F = \theta(p_F^2 - p_i^2),$$

где единичная функция здесь и далее определяется следующим образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Предположим, что во всём инерционном интервале $\eta_s \ll 1$. Выражение (2.16) будем вычислять с точностью до логарифмических по a_1 членов, как и в интеграле столкновений Ландау. Это значит, что будет учтено взаимодействие с передачей малого импульса при соударениях. Выше было показано, что для степенных функций распределения в определённом диапазоне изменения импульса, характерном для твердотельной плазмы проводников, существенными оказываются нелогарифмические члены в интеграле столкновений Больцмана, связанные с

передачей большого импульса при соударении. Вычисление нелогарифмических членов в данной задаче связано с большими трудностями, поэтому условия, приведённые ниже и полученные при учёте только малых передаваемых импульсов, будут справедливы для плазмы полупроводников, а для плазмы проводников они более жёсткие, чем это необходимо. С учётом сделанных замечаний и пояснений интеграл столкновений можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(\mathbf{p})}{\partial t} = & \frac{2}{(2\pi\hbar)^6} \int_{0 \leq |\mathbf{p}_1| \leq p'} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 W \times \\ & \times [\eta_2 \eta_3 \theta(p_1^2 - p_F^2) - \eta_s \eta_1 (1 - \eta_2) (1 - \eta_3)] \times \\ & \times \delta(E + E_1 - E_2 - E_3) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) + \\ & + \frac{2}{(2\pi\hbar)^6} \int_{p' \leq |\mathbf{p}_1| \leq p''} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 W \times \\ & \times [\eta_2 \eta_3 - \eta_s \eta_{s1} (1 - \eta_2) (1 - \eta_3)] \times \\ & \times \delta(E + E_1 - E_2 - E_3) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Вначале вычислим второй интеграл в правой части (2.17), проводя такие же преобразования, как при выводе (2.10). Интегрируя по φ , φ_1 и подставляя W , соответствующее экранированному кулоновскому взаимодействию, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta(p)}{\partial t} \right)_{p'}^{p''} = & \int_{0 \leq (x+q)y \leq p''} \frac{q dq}{(q^2 + a^2)^2} \int dx \int dy F(y, x, q) - \\ & - \int_{0 \leq (x+q)y \leq p'} \frac{q dq}{(q^2 + a^2)^2} \int dx \int dy F(y, x, q), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} F(y, x, q) = & \frac{16\pi^2 e^4 m A^2 p^{4s}}{(2\pi\hbar)^3} |y|(x+q)^2 \times \\ & \times \left\{ (1 + 2qx + q^2)^s [y^2(x+q)^2 - 2qx + q^2]^s - |y|^{2s} |x+q|^{2s} \right\}, \\ q = & \frac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|}, \quad x = \cos \theta, \quad y = (\cos \theta_1)^{-1}, \quad \cos \theta = \frac{|\mathbf{p}\mathbf{q}|}{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}, \\ \cos \theta_1 = & \frac{|\mathbf{p}_1\mathbf{q}|}{|\mathbf{p}_1||\mathbf{q}|}, \quad A = \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} \alpha |I_1|^{1/2}. \end{aligned}$$

Чтобы записать пределы интегрирования в (2.18), необходимо найти области существования неравенств $0 \leq (x+q)y \leq p''$, $0 \leq (x+q)y \leq p'$, учитывая, что $p'' > 1$, $p' < 1$, $|x| < 1$, $1 \leq |y| < \infty$.

Воспользовавшись чётностью функции $F(y, x, q)$ по y и выполнив замену переменной $z = y^2(x+q)^2$, формулу (2.18) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta(p)}{\partial t} \right)_{p'}^{p''} = & \int_0^{p''-1} dq \int_{-1}^1 dx \int_{(x+q)^2}^{p''^2} dz F_1(z, x, q) + \\ & + \int_{p''-1}^{p''+1} dq \int_{-1}^{p''-q} dx \int_{(x+q)^2}^{p''^2} dz F_1(z, x, q) - \\ & - \int_0^{1-p'} dq \int_{-p'-q}^{p'-q} dx \int_{(x+q)^2}^{p'^2} dz F_1(z, x, q) - \\ & - \int_{1-p'}^{1+p'} dq \int_{-1}^{p'-q} dx \int_{(x+q)^2}^{p'^2} dz F_1(z, x, q), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$F_1(z, x, q) = \frac{8\pi^2 e^4 m A^2 p^{4s}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{q}{(q^2 + a^2)^2} \times \\ \times \left\{ (1 + 2qx + q^2)^s (z - 2qx + q^2)^s - z^s \right\}.$$

Мы не будем учитывать поведение степенной функции распределения вблизи источника и стока энергии, т.е. при $p' \approx 1$ и $p'' \approx 1$. Поэтому для вычислений с точностью до членов, логарифмических по a , достаточно взять интегралы в первом и третьем слагаемых в правой части (2.19). После интегрирования по z и x подынтегральное выражение необходимо разложить по степеням q и, поскольку основной вклад вносит $q \leq a$, учесть члены вплоть до пропорциональных q^3 .

Интегрирование первого и третьего слагаемых в (2.19) приводит к следующему выражению:

$$\left(\frac{\partial \eta(p)}{\partial t} \right)_{p'}^{p''} = \frac{16\pi^2 e^4 m A^2 p^{4s}}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ \times \left\{ \left[\frac{(4s+5)(4s+3)}{(2s+3)(2s+5)(s+1)} + \frac{s(2s+1)}{3(s+1)} (p''+1)^{s+1} \times \right. \right. \\ \times {}_3F_2 \left(-s-1, s+\frac{3}{2}, s+1; s+\frac{1}{2}, s; \frac{1}{p''+1} \right) \left. \right] \times \\ \times \int_0^{\min(1, p''-1)} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} + \left[p'^{2s+1} - \frac{2s(-s+1)}{(2s+5)(s+1)} \times \right. \\ \times p'^{2s+5} - \frac{s(4s+5)}{(2s+3)(s+1)} p'^{2s+3} - \frac{2s+3}{3} p'^{2s+1} (1+p'^2)^s \times \\ \times {}_3F_2 \left(-s, s+\frac{5}{2}, s+2; s+\frac{3}{2}, s+1; \frac{p'^2}{p''+1} \right) \left. \right] \times \\ \times \left. \int_0^{\min(p', 1-p')} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} \right\}.$$

Вычислим первый интеграл в (2.17), используя такие же, как и выше, преобразования, с последующим интегрированием по формуле

$$\int_x^\beta f(x) \prod_{k=1}^n \theta(\varphi_k(x)) dx = F(\beta) \prod_{k=1}^n \theta(\varphi_k(\beta)) - \\ - F(\alpha) \prod_{k=1}^n \theta(\varphi_k(\alpha)) - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{m_l} F(a_i^l) \frac{\varphi_i'(a_i^l)}{|\varphi_i'(a_i^l)|} \times \\ \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n \theta(\varphi_k(a_i^l)) [\theta(\beta - a_i^l) \theta(a_i^l - \alpha) - \theta(a_i^l - \beta) \theta(\alpha - a_i^l)].$$

Выражение для первого интеграла в (2.17) запишется как

$$\left(\frac{\partial \eta(p)}{\partial t} \right)_0^{p'} = \frac{32\pi^2 e^4 m A p^{2s}}{(2\pi\hbar)^3} p_F^3 \frac{s}{3} \int_0^{p'} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2}.$$

Окончательное выражение для потока энергии в импульсном пространстве, определённого через интеграл столкновений согласно (2.3), имеет вид

$$I_1 = - \frac{32\pi^3 e^4 A^2 p^{4s+5}}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \frac{4s+3}{(2s+5)(2s+3)(s+1)} \times \right. \\ \times \left. \int_0^{\min(1, p''-1)} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} - \frac{s}{3(s+2)} p'^{2s+1} \int_0^{p'} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} \right\} - \\ - \frac{32\pi^3 e^4 A p^{2s+5}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{s}{3(2s+5)} p_F^3 \int_0^{p'} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2}. \quad (2.20)$$

Из соотношения (2.20) можно получить условие, налагаемое на плотность электронов вблизи стока (плотность, определяющая интенсивность источника), при которой поток I_1 постоянен и, следовательно, в инерционном интервале (между источником и стоком) распределение η_s близко к универсальному. Это условие будет выполнено, если первое слагаемое в (2.20) значительно превышает два других:

$$\eta_s(p) \gg p_F^3 \left| \frac{s(2s+3)(s+1)}{3(4s+3)} \right| \int_0^{p''} \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} \times \\ \times \left(\int_0^1 \frac{q^3 dq}{(q^2 + a^2)^2} \right)^{-1}.$$

Таким образом, для квантового интеграла столкновений Больцмана найдено явное выражение как функции импульса p , показателя степени s , импульса p' , который отвечает стоку энергии, импульса p'' , который отвечает источнику энергии. Показано, что при отсутствии частиц вне энергетического интервала, который находится между источником и стоком, в границах инерционного интервала

$$|p'' - p'| \approx (5-6) p_{ch}, \quad p' \approx p_{ch} = 2a_1, \quad (2.21a)$$

показатель степени s отличается от универсального не более чем на 10 %.

В работах [16, 17] рассмотрен более распространённый в твердотельной плазме случай, когда в интервале между источником и стоком энергии в импульсном пространстве функция распределения электронов имеет степенной вид, а за его пределами представляет собой термодинамически равновесную функцию Ферми–Дирака. Показано, что стационарное неравновесное распределение электронов близко к универсальному ($s = -5/4$ в случае безграничного инерционного интервала), если расположение источника и стока, а также их интенсивности удовлетворяют определённым ниже условиям. Так, показатель степени s в распределении η_s (η_s — числа заполнения) будет отличаться от $-5/4$ меньше чем на 10 %, если будут соблюдены условия

$$|p'' - p'| \approx (5-6) p_{ch}, \quad \eta_s(p) \gg 10^{-3}, \quad p' \approx p_{ch} = (2-3) a_1. \quad (2.21b)$$

Таким образом, неравновесное универсальное распределение электронов возможно даже при числах заполнения, значительно (на один–два порядка) меньших равновесных.

3. Теоретические исследования нестационарных неравновесных функций распределения частиц с потоком по спектру

3.1. Численное моделирование формирования функций распределения частиц для уравнений типа Ландау–Фоккера–Планка

3.1.1. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений типа Ландау–Фоккера–Планка. Нелинейное кинетическое уравнение Больцмана [3–8] описывает систему многих частиц, взаимодействующих по законам классической механики, и является основным уравне-

нием в моделях динамики разрежённого газа. В общем виде уравнение для функции распределения частиц f_α , зависящей от пространственных координат \mathbf{r} , скоростей \mathbf{v} и времени t , может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st} + S_\alpha, \quad (3.1)$$

где m_α — масса частиц сорта α , F_α — действующая на частицу сорта α сила, S_α — источники (стоки) частиц и энергии (открытые системы), $(\partial f_\alpha / \partial t)_{st}$ — интеграл столкновений. Оно является важнейшим уравнением в приложениях для математического описания динамики разреженного газа и плазмы. Модели кинетических процессов, обусловленных кулоновскими столкновениями, занимают значительное место в приложениях, связанных как с лабораторной, так и магнитосферной плазмой, плазмохимией и твердотельной плазмой.

В плазме кулоновские столкновения с рассеянием на малые углы (с малым переданным импульсом) более важны, чем столкновения с изменением скорости (импульса) на большие величины. Интеграл столкновений для заряженных частиц впервые был получен Ландау (см., например, [3]) из интеграла столкновений Больцмана с учётом эффекта малости передаваемого при кулоновских столкновениях импульса и эффекта экранирования заряда частицы вне сферы дебаевского радиуса другими частицами. Уравнение типа Ландау получено также с учётом рассеяния на малые углы, но для произвольных потенциалов взаимодействия между частицами [18–28]. Наиболее подходящим объектом для моделирования с помощью интеграла столкновений типа Ландау являются газы со степенными потенциалами с бесконечным радиусом взаимодействия между частицами.

Наиболее распространённый метод для численного моделирования — это (регулярный) метод конечных разностей (методы типа Монте-Карло обладают определёнными недостатками для дальнедействующих сил). Однако следует использовать объединённый подход, когда аппроксимируются уравнения, описывающие реальную динамику, и адекватно отражаются физические законы, являющиеся базой физической модели. Этот путь, основанный на использовании консервативных и полностью консервативных разностных схем, связан с работами А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, Ю.П. Попова, А.В. Бобылёва, И.Ф. Потапенко, В.А. Чуянова и др. [18–28].

Такой подход в сочетании с высокой точностью дал возможность получить в ряде случаев асимптотические решения и проверить аналитические подходы и другие методы моделирования.

В пространственно-однородном случае интеграл столкновений Больцмана для функции распределения $f(\mathbf{v}, t)$ был записан в виде (2.1), где вероятность перехода вследствие столкновения W определяется дифференциальным сечением рассеяния $\sigma(u, \mu)$, являющимся функцией относительной скорости $u > 0$ и параметра $\mu = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$ — угол рассеяния). Построение сечения рассеяния $\sigma(u, \mu)$ для данного потенциала взаимодействия $U(r)$ — известная задача классической механики (см., например, [22–28]).

Интеграл столкновений в форме Ландау для частиц одного сорта с зарядом e в пространственно-однород-

ном случае приведён в разделе 2.1 (см. (2.7)) и имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial t} \right)_{st,L} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ \int d\mathbf{w} U_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{\partial}{\partial w_j} \right) f(\mathbf{v}) f(\mathbf{w}) \right\},$$

$$U_{ij} = \frac{u^2 \delta_{ij} - u_i u_j}{u^3}, \quad (3.2)$$

где $\Gamma = 2\pi e^4 A / m^2$, симметричное ядро U_{ij} является функцией относительной скорости частиц $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$. Грубым условием применимости уравнения (3.2) служит неравенство $e^2 n^{1/3} \ll T$, означающее, что средняя энергия кулоновского взаимодействия мала по сравнению со средней кинетической энергией (n — плотность частиц, T — температура, выраженная в энергетических единицах).

3.1.2. Численное моделирование релаксации функции распределения частиц для интеграла столкновений Ландау – Фоккера – Планка. Рассматривается релаксация начального распределения для газов частиц со степенными потенциалами взаимодействия в случае изотропной функции распределения $f(\mathbf{v}, t) = f(|\mathbf{v}|, t)$, которая описывается уравнением Ландау – Фоккера – Планка в симметричной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{v} \int_0^\infty dw Q(v, w) \left[wf(w) \frac{\partial f(v)}{\partial v} - vf(v) \frac{\partial f(w)}{\partial w} \right] \right\}, \quad (3.3)$$

где $Q(v, w)$ — симметричное ядро,

$$Q(v, w) = \frac{\pi}{8} v^3 w^3 \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) u \sigma(u),$$

$$u^2 = v^2 + w^2 - 2vw\mu.$$

Можно убедиться, что в отсутствие источников и стоков из (3.3) следуют законы сохранения плотности частиц и энергии

$$n = 4\pi \int_0^\infty dv v^2 f(v, t) = \text{const},$$

$$k_B T = \frac{4\pi m}{3n} \int_0^\infty dv v^4 f(v, t) = \text{const}, \quad t \geq 0.$$

Единственным стационарным равновесным решением кинетического уравнения Больцмана является распределение Максвелла. Исследование формирования функции распределения частиц при энергиях, существенно превышающих среднюю энергию (хвостов функции распределения частиц), кроме академического интереса, может быть полезно в задачах, связанных со взаимодействием волна – частица, ускорением электронов полем и образованием хвостов убегающих электронов, в проблеме термоядерного синтеза (электрон-циклотронный нагрев, нижнегибридный резонанс, ядерные реакции на хвостах ионной функции распределения и т.д.). Для кулоновского потенциала такое исследование проведено в [21–28].

Равновесное решение имеет вид

$$f_M = \frac{4}{\pi^{1/2}} \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{3}{2} v^2 \right), \quad v_{th} = 1,$$

где v_{th} — тепловая скорость. Законы сохранения получим из уравнения (3.3) интегрированием обеих частей урав-

нения по скорости с соответствующим весом:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{J}{v} \Big|_0^\infty = 0, \quad \frac{dE}{dt} = (vJ) \Big|_0^\infty - 2 \int_0^\infty J dv = 0.$$

Применяя интегриродифференциальный метод к уравнению (3.3), получим следующую (неявную) разностную схему:

$$\frac{f_i^k - f_i^{k-1}}{\tau} = \frac{1}{v_i^2 h_{i+1/2}} \left[\frac{J_{i+1/2}^k}{v_{i+1/2}} - \frac{J_{i-1/2}^k}{v_{i-1/2}} \right], \quad i = 2, \dots, M. \quad (3.4)$$

Схема записана в виде локального закона сохранения числа частиц, а аппроксимация функции J_i должна обеспечить выполнение закона сохранения энергии. Заменяем верхний предел интегрирования в (3.3) значением скорости в последней точке. Аппроксимируя интегралы по формуле трапеции, а производные — центральными разностями, получим

$$J_{i+1/2}^k = \sum_{m=1}^M Q_{i+1/2, m+1/2} h_{m+1} \times \\ \times \left(\frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{h_{i+1}} \frac{f_m^k v_m + f_{m+1}^k v_{m+1}}{2} - \frac{f_{m+1}^k - f_m^k}{h_{m+1}} \frac{f_i^k v_i + f_{i+1}^k v_{i+1}}{2} \right),$$

где $Q_{i+1/2, m+1/2} = Q_{m+1/2, i+1/2}$. Плотность частиц записывается как

$$n = \sum_{i=1}^{M-1} \frac{f_i v_i^2 + f_{i+1} v_{i+1}^2}{2} h_{i+1} = \\ = \sum_{i=1}^{M-1} \frac{f_i v_i^2}{2} h_{i+1} + \sum_{i=2}^M \frac{f_i v_i^2}{2} h_i = \sum_{i=2}^{M-1} \frac{f_i v_i^2}{2} h_i,$$

поскольку считаем, что $f_{M+1} = 0$ и $v_1 = 0$. Таким образом, первая точка не входит в разностное уравнение. Вычислим с помощью разностного уравнения (3.4) изменение числа частиц на шаге по времени, суммируя обе части уравнения с соответствующим весом:

$$\Delta n = \sum_{i=2}^{M-1} h_i v_i^2 (f_i^k - f_i^{k-1}) = \tau \left[\frac{J_{M+1/2}^k}{v_{M+1/2}} - \frac{J_{3/2}^k}{v_{3/2}} \right].$$

Будем считать, что $J_{M+1/2} = 0$, так как на хвосте $f_M = 0$, и формально положим $J_{3/2} = 0$ (ниже выясним, что это означает), тогда $\Delta n = 0$. Изменение энергии

$$\Delta E = \sum_{i=2}^{M-1} h_i v_i^4 (f_i^k - f_i^{k-1}) = \\ = \tau \left[\frac{v_{M+1}^2}{v_{M+1/2}} J_{M+1/2} - \frac{v_2^2}{v_{3/2}} J_{3/2} - 2 \sum_{i=2}^{M-1} h_{i+1} J_{i+1/2} \right].$$

Если учесть, что закон сохранения числа частиц выполнен и справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{M-1} h_{i+1} J_{i+1/2} = 0,$$

то $\Delta E \approx 0$. Разностное уравнение (3.4) в точке $i = 2$ записывается следующим образом:

$$\frac{f_i^k - f_i^{k-1}}{\tau} = \frac{1}{v_i^2 h_{i+1/2}} \frac{J_{i+1/2}^k}{v_{i+1/2}}, \quad i = 2. \quad (3.4a)$$

Нам необходимо знать граничное условие для функции распределения в точке $i = 1$, получим его из условия $J_{3/2} = 0$.

Для численного решения схема преобразуется в систему нелинейных разностных уравнений, которые решаются на каждом шаге по времени и, соответственно, на каждой итерации методом прогонки.

Приведём схему к форме, удобной для численных расчётов. Для этого введём следующие обозначения:

$$\Sigma_{i+1} = \sum_{m=1}^{M-1} h_{m+1} Q_{i+1/2, m+1/2} (v_m f_m + v_{m+1} f_{m+1}),$$

$$\Theta_{i+1} = \sum_{m=1}^{M-1} Q_{i+1/2, m+1/2} (f_{m+1} - f_m),$$

$$A_i = \frac{1}{v_{i-1/2} h_i} (\Sigma_i - v_i h_i \Theta_i), \quad B_i = \frac{1}{v_{i-1/2} h_i} (\Sigma_i + v_i h_i \Theta_i),$$

$$\alpha_i = \frac{\tau}{v_i^2 h_i} A_{i+1}, \quad \beta_i = \frac{\tau}{v_i^2 h_i} (A_i + B_{i+1}),$$

$$\gamma_i = \frac{\tau}{v_i^2 h_i} B_i, \quad \psi_i = -f_i^{k-1}, \quad i = 2, \dots, M-1.$$

Тогда система разностных уравнений записывается как

$$\alpha_i f_{i+1} - (1 + \beta_i) f_i + \gamma_i f_{i-1} = \psi_i, \quad i = 2, \dots, M-1, \quad (3.5)$$

причём в первом разностном уравнении

$$\alpha_2 = \frac{\tau}{v_2^2 h_i} A_3, \quad \beta_2 = \frac{\tau}{v_2^2 h_i} B_3, \quad \gamma_2 = 0.$$

Из равенства $J_{3/2} = 0$ следует, что функции в начальных точках связаны между собой в любой момент времени следующим соотношением:

$$f_1 = f_2 \left(1 - v_2^2 \frac{N_2}{E_2} \right). \quad (3.6)$$

Если аппроксимировать граничное условие второго рода (равенство нулю производной) исходя из постановки точной задачи с первым или вторым порядком аппроксимации, можно не получить закон сохранения. Что означает аппроксимация, полученная формально из требования выполнения разностного аналога закона сохранения? Такое граничное условие, возникшее формально, оказывается вполне разумным. Рассмотрим для определённости, например, заряженные частицы и ядро $Q(v, w)$, соответствующее кулоновскому взаимодействию. Предположим, что имеем функцию квазимаквелловского вида $f_i^M = C \exp(-v_i^2/v_{th}^2)$. Тогда, оценивая выражение (3.4a) и пренебрегая членами порядка $O(h^3)$, получим

$$f_1^M = f_2^M \left(1 + \frac{v_2^2}{v_{th}^2} \right).$$

Заметим лишь, что изначально, казалось бы, формальное требование полной консервативности приводит к более естественной аппроксимации точных условий при последующем анализе исходных точных данных. Мы возвратимся к обсуждению этого вопроса при построении схемы для уравнения Ландау – Фоккера – Планка.

Поскольку схемы выбраны неявными, шаг по времени τ определяется требуемой точностью расчёта и харак-

тером распределения. Схема немонотонна; она может быть сделана монотонной, но тогда придётся пожертвовать вторым порядком аппроксимации по пространству.

Поскольку для устойчивости и физической осмысленности функция распределения должна быть неотрицательной, коэффициенты разностного уравнения (3.5) должны удовлетворять условиям $\alpha, \gamma > 0, 1 + \beta > 0$, для чего $h_i = v_i - v_{i-1}, h_i < E_i/n_i v_i$. Уравнение Ландау–Фоккера–Планка является параболическим, при $v \rightarrow \infty$ оно вырождается в уравнение почти гиперболического типа, поэтому для учёта экспоненциально быстрого убывания функций для обеспечения точности шаг следует даже уменьшать. Грубая оценка шага по скорости, которая в конкретных задачах может быть завышена или занижена, имеет вид $h < v_{th}^2/nL$.

Для степенных потенциалов взаимодействия $U = \alpha/r^\beta$, где $1 < \beta < 4$, симметричное ядро $Q(v, w)$ представляется в виде [24, 25]:

$$Q(v, w) = \frac{a(v, w)(v+w)^{n_1+4} + b(v, w)|v-w|^{n_1+4}}{(n_1+2)(n_1+4)(n_1+6)}, \quad (3.7)$$

$$a(v, w) = (n_1+4)vw - (v^2 + w^2),$$

$$b(v, w) = (n_1+4)vw + (v^2 + w^2), \quad n_1 = \frac{\beta-4}{\beta}.$$

Отрицательные значения n_1 соответствуют мягким потенциалам ($1 \leq \beta \leq 4$). Для заряженных частиц $\beta = 1$ ($n_1 = -3$).

Для иллюстрации работы разностной схемы начальное распределение выбирается в виде дельта-функции, которая аппроксимируется следующим образом:

$$f(v_i, 0) = \begin{cases} \frac{2}{v_{i+1} - v_{i-1}}, & v_i = 1, \\ 0, & v_i \neq 1. \end{cases}$$

Подобная аппроксимация моделирует разностную дельта-функцию, вследствие чего как плотность, так и энергия частиц становятся равными единице. Ограничимся представлением результатов расчётов с таким типом начального распределения.

Релаксация начального распределения к равновесному состоянию является классической задачей физики плазмы и тестовой задачей для любых моделей столкновительной плазмы.

Забегая вперёд, скажем, что плотность сохраняется с машинной точностью (случайная ошибка), а энергия зависит от точности итераций δ из-за нелинейности уравнения. Для $\delta = 10^{-3}$ относительная ошибка $\Delta \epsilon$ равна $10^{-2}\%$, а для $\delta = 10^{-7}$ ошибка $\Delta \epsilon = 10^{-5}\%$, т.е. ошибка энергии не превышает 10^{-7} . Такая точность важна, как правило, при исследовании асимптотических задач.

Рассматриваются финитные начальные условия для $t = 0$, начальная функция $f_0(v) = f(v, 0)$ сосредоточена в тепловой области $v \approx v_{th}$.

Для больших времён, когда в тепловой области релаксация закончена, уравнение в горячей области $v \gg v_{th}$ можно рассматривать как линейное:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{n}{8} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^3 \sigma(v) \left(\frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + vf \right) \right].$$

Здесь учтено, что в горячей области ядро $Q(v, w) \rightarrow \pi w^3 v^4 \sigma(v)/6$ при $v \rightarrow \infty$, и для степенного потенциала взаимодействия используется сечение рассеяния вида $\sigma(u, \mu) = g_\beta(\mu) u^{-4/\beta}$ [22–25]. Подставляя выражение для $Q(v, w)$ в (3.3), при $v \gg v_{th}$ получаем окончательный вид последнего уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{ng_\beta}{8} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^{3-4/\beta} \left(\frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + vf \right) \right], \quad (3.8)$$

где использовано обозначение

$$g_\beta = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_\beta(\mu) (1 - \mu^2). \quad (3.9)$$

Например, для кулоновского потенциала ($\beta = 1$) формула (3.9) даёт $g_1 = 32\pi e^4 L/m$. В этом случае из (3.8) следует известное линейное уравнение Ландау–Фоккера–Планка для плазмы.

Далее рассматривается уравнение (3.8) для произвольных потенциалов $U = \alpha/r^\beta, 1 \leq \beta < 4$. Схема уже была представлена выше. Для выбранных переменных законы сохранения плотности частиц и энергии выглядят следующим образом:

$$n = \int_0^\infty v^2 dv f(v, t) = 1, \quad E = \int_0^\infty v^4 dv f(v, t), \quad t \geq 0. \quad (3.10)$$

Тепловая скорость $v_{th} = 1$, и равновесное решение записывается как

$$f_M(v) = \frac{4}{\pi^{1/2}} \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{3}{2} v^2 \right).$$

В начальный момент функция, сосредоточенная в тепловой области, имеет вид дельта-функции: $f(v, 0) = \delta(v-1)/v^2$. При выборе граничного значения интервала по скоростям L горячие частицы оцениваются по распределению Максвелла, что даёт $L \approx (7-8)v_{th}$. Используется построенная в (3.5) разностная схема. Начальная функция аппроксимируется, как показано выше. При такой аппроксимации число частиц равно единице и кинетическая энергия $v_i^2 = 1$.

Приведём результаты моделирования. Достаточно быстро функция размывается в тепловой области ($0 < v < 2$) и затем становится монотонной с максимумом в нуле в некоторый момент t_0 , который соответствует так называемому столкновительному времени. Это характерное время t_0 слабо зависит от показателя β в выражении для потенциала $U = \alpha/r^\beta$. В этой области функции распределения для разных показателей довольно близки друг к другу в течение всего процесса релаксации для разных потенциалов. Различие более существенно в более горячей области $v > 2$ и на хвостах распределений. Для лучшего (наглядного) представления результатов вводится функция, нормированная на максвелловское распределение, $g(v, t) = f(v, t)/f_M(v)$. На рисунках 1–3 представлены графики функции $f(v, t)$ в области скоростей $2 < v/v_{th} < 5$ для различных моментов времени и значений параметра β . Все кривые демонстрируют волновой характер распространения $g(v, t)$ в область высоких скоростей. Для кулоновского взаимодействия ($\beta = 1, n_1 = -3, U = \alpha/r$) функция $g(v, t)$ пока-

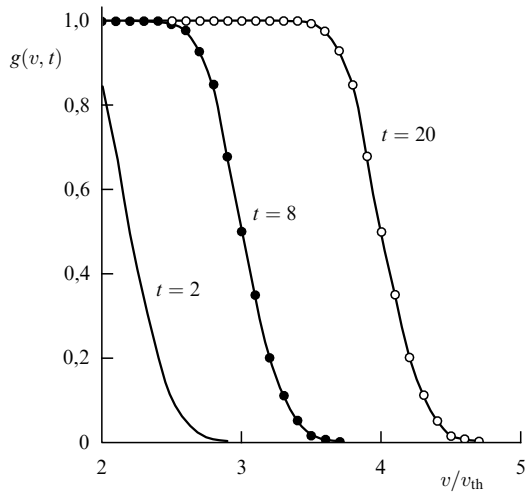


Рис. 1. Графики функции распределения, нормированной на распределение Максвелла, $g(v, t) = f(v, t)/f_M(v)$ в области скоростей $2 < v/v_{th} < 5$ для различных моментов времени t (в произвольных единицах). Время нормировано на время электрон-электронных столкновений (3.11). Случай соответствует кулоновскому взаимодействию: $n_1 = -3, \beta = 1, U = \alpha/r$.

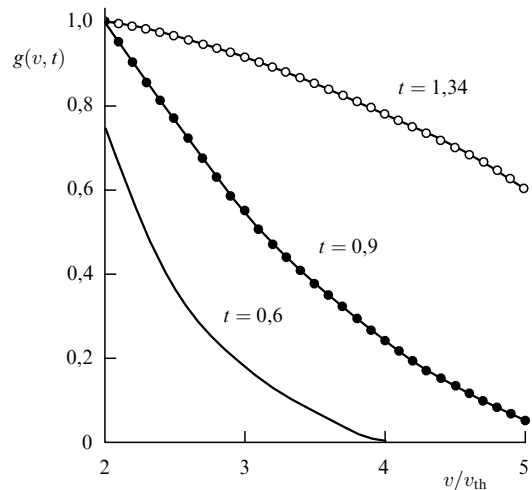


Рис. 3. Графики функции распределения, нормированной на распределение Максвелла, $g(v, t) = f(v, t)/f_M(v)$ в области скоростей $2 < v/v_{th} < 5$ для различных моментов времени t (в произвольных единицах). Время нормировано на время равновесных столкновений молекул. Случай соответствует взаимодействию максвелловских молекул: $n_1 = 0, \beta = 4, U = \alpha/r^4$.

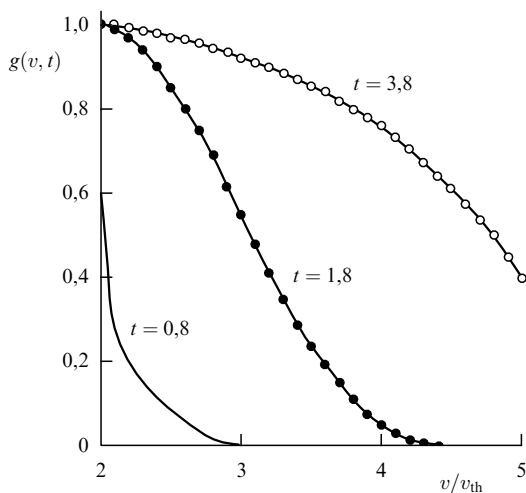


Рис. 2. Графики функции распределения, нормированной на распределение Максвелла, $g(v, t) = f(v, t)/f_M(v)$ в области скоростей $2 < v/v_{th} < 5$ для различных моментов времени t (в произвольных единицах). Время нормировано на время электрон-электронных столкновений (3.11). Случай соответствует дипольному взаимодействию: $n_1 = -1, \beta = 2, U = \alpha/r^2$.

зана на рис. 1. Решение имеет характер волны, распространяющейся со стабильным (жестким) фронтом. Для потенциалов с $1 < \beta < 2$ релаксация хвоста идёт медленнее, чем релаксация кора распределения. Начиная с $2 < \beta < 3$ эволюция хвоста всё менее имеет волновой характер. На рисунке 2 видно, что фронт волны медленно возрастает со временем ($\beta = 2, n_1 = -1, U = \alpha/r^2$). Для жестких потенциалов ($\beta > 4$) характерные времена релаксации кора распределения и хвоста практически не различаются (времена 1–2). Таким образом, скорости распространения и размывания слабо различимы (рис. 3) и релаксация в тепловой и надтепловой областях происходит одновременно.

Как можно видеть, ширина фронта $\Delta_f(t)$ существенно зависит от показателя β потенциала взаимодействия. Так, $\Delta_f(t)$ является постоянной величиной для $1 < \beta < 2$,

т.е. в этом случае распространение $g(v, t)$ имеет характер волны со стабильным профилем, который не размывается во времени при $t > 0$. Этот факт для $\beta = 1$ был открыт при численном решении в [22–25] и соответствующее аналитическое решение построено. Начиная с показателя $\beta = 2$ фронт слегка размывается в соответствии со слабой логарифмической зависимостью от времени: $\Delta_f(t) \propto \sqrt{\ln t}$. Поведение решения должно сохранять волновой характер. Скорость распространения фронта $v_f(t)$ больше скорости его размывания.

Для удобства анализа уравнение (3.8) преобразуется к удобному виду с помощью введения безразмерных переменных для скорости, времени и функции распределения:

$$x = \left[\frac{v}{v_{th}} \right]^{(4+\beta)/2\beta} X^{(4+\beta)/2\beta}, \quad \tau = t \frac{\rho g \beta}{8} \frac{4-\beta}{\beta} \left[\frac{X}{v_{th}} \right]^{(4-\beta)/2\beta}, \quad (3.11)$$

$$f(v, t) = f_M(v) u(x, \tau),$$

где $X = 2\beta(4-\beta)/(4+\beta)^2$ и $f_M(v)$ — распределение Максвелла. Подставляя (3.11) в (3.8), получим уравнение в безразмерных переменных для функции распределения $u(x, \tau)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{x^{1-p}}{p} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad p = 2 \frac{4-\beta}{4+\beta}. \quad (3.12)$$

Тип последнего уравнения даёт представление о волновом характере решения. Действительно, стоит заметить, что нам интересна горячая область $x \gg 1$ и времена, при которых $u(x, \tau) \approx 1$ и происходит медленное установление равновесного решения $u_M(x) = 1$ на хвостах, а $u(x, \tau) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Условие $x \gg 1$ учтём с помощью новых переменных $\tilde{x} = x/x_0$ и $\tilde{\tau} = \tau/x_0^p$, где $x_0 \gg 1$ — некоторый характеристический масштаб. Тогда в уравнении (3.12) перед старшей производной появляется малый параметр $x_0^{p-2} \ll 1$. Отсюда видно, что на хвостах $x \rightarrow \infty$ уравнение Ландау меняет свой тип и становится оператором переноса. Учитывая это, введём формаль-

ный параметр ε перед второй производной. В результате получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{x^{1-p}}{p} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.13)$$

При $\varepsilon \approx 0$ уравнение (3.13) сворачивается в уравнение первого порядка, и равновесное решение $u_M(x)$ просто переносится по характеристикам этого уравнения. Типичное решение имеет форму ступенчатой функции:

$$u(x, \tau) \approx \theta(\tau^{1/p} - x), \quad p = 2 \frac{4 - \beta}{4 + \beta}. \quad (3.14)$$

Приближённое решение (3.14) правильно отражает асимптотический закон, по которому движется фронт волны $x_f(\tau) \propto \tau^{1/p}$, но не описывает структуру фронта. Чтобы проанализировать структуру фронта, уравнение (3.13) преобразуется с учётом полученной ранее информации о поведении фронта волны. Вводя новые переменные

$$z = \frac{x - \tau^{1/p}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad u(x, \tau) = \phi(z, \tau),$$

перепишем (3.13) для новой функции $\phi(z, \tau)$ как

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{2}{p} \frac{\tau^{1/p} - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\left(1 + \sqrt{\varepsilon} \frac{z}{\tau^{1/p}} \right)^{1-p} - 1 \right] \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\}. \quad (3.15)$$

Положим ε малым, но z оставим конечным. При этом условном пределе формула (3.15) приводится к виду

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \gamma \frac{z}{\tau} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \quad \gamma = 2 \frac{1-p}{p}. \quad (3.16)$$

Граничные условия для функции $\phi(z, \tau)$ имеют следующий вид: $\phi \rightarrow 1$ при $z \rightarrow -\infty$ (за фронтом) и $\phi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ (перед фронтом). Функция $\phi(z, \tau)$ строится как решение начальной задачи для времени $\tau > 1$ с соответствующим начальным условием $\phi(z, 1) = \theta(-z)$ (ср. с функцией (3.14)). Соответствующим изменением переменных уравнение (3.16) приводится к уравнению теплопроводности [24, 25]. В результате получается решение уравнения (3.16) в автомодельной форме:

$$\begin{aligned} \phi(z, \tau) &= \Phi \left[z \sqrt{\frac{1-\gamma}{2(\tau-\tau^\gamma)}} \right], \quad \tau > 1, \\ \phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty dy \exp(-y^2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Возвращаясь к переменной x и вспоминая, что $\varepsilon = 1$, находим квазистационарное решение уравнения (3.17):

$$u(x, \tau) \approx \Phi \left[\frac{x - \tau^{1/p}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-\gamma}{\tau - \tau^\gamma}} \right], \quad \tau > 1, \quad \gamma = 2 \frac{1-p}{p}. \quad (3.18)$$

Чтобы понять, где решение (3.18) справедливо, сформулируем все предположения, сделанные ранее. Кинетическое уравнение рассматривается при $x \gg 1$ для больших времён (бóльших, чем время кулоновских столкновений) $\tau \gg 1$ вблизи фронта волны $x_f(\tau) \propto \tau^{1/p}$, $x - \tau^{1/p} \ll \tau^{1/p}$. Последнее неравенство оправдывает переход от уравнения (3.15) к уравнению (3.16) при условии $\varepsilon = 1$ и приводит к следующим ограничениям. Полученное

решение (3.18) неприменимо, во-первых, в интервале $0 < x \ll x_f$ и, во-вторых, для частиц вне области $x > 2x_f$. Оба эти случая неинтересны с практической точки зрения, поскольку с хорошей точностью можно предположить, что $u(x, \tau) \approx 1$ в первой области $x \ll x_f(t)$ и $u(x, \tau) \approx 0$ во второй области $x \gg 2x_f$. Можно упростить формулу (3.18), учтя условие $\tau \gg 1$. Поскольку конечный результат зависит от γ , рассматриваются три случая для выражения под корнем в формуле (3.18). Выражение $(1-\gamma)(\tau - \tau^\gamma)^{-1}$ при $\gamma < 1$ стремится к $(1-\gamma)\tau^{-1}$, при $\gamma > 1$ — к $(\gamma-1)\tau^{-\gamma}$. Случай $\gamma = 1$ является пограничным, отличным от других. Заметим, что $\gamma = 1$ соответствует $\beta = 2$, т.е. дипольному взаимодействию. В этом предельном случае выражение переписывается следующим образом:

$$(1-\gamma)(\tau - \tau^\gamma)^{-1} = (1-\gamma) \left(\tau^\gamma \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[(1-\gamma) \ln \tau]^i}{i!} \right)^{-1}.$$

При $\gamma = 1$ в последнем выражении остаётся только первый член, поскольку коэффициенты в сумме исчезают для всех $i > 2$.

Итак, при условии $\tau \gg 1$ получены упрощённые выражения для асимптотического решения $u(x, \tau)$, которое является функцией показателя γ :

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \Phi \left\{ \frac{x - \tau^{1/p}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-\gamma}{\tau}} \right\}, \quad \gamma < 1; \\ u(x, \tau) &= \Phi \left\{ \frac{x - \tau^{1/p}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\tau \ln \tau}} \right\}, \quad \gamma = 1; \\ u(x, \tau) &= \Phi \left\{ \frac{x - \tau^{1/p}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\tau}} \right\}, \quad \gamma > 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Наконец, сформулируем результаты, полученные выше, для исходных переменных v, t и для функции распределения $f_\beta(v, t)$:

$$\begin{aligned} f_\beta(v, t) &\approx n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2T} \right) \times \\ &\times u \left(v \sqrt{\frac{m}{T}}, t \frac{\rho g_\beta}{8} \left(\frac{m}{T} \right)^{(4-\beta)/2\beta} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Постоянная величина g_β определена в (3.9). Функция $u(v, t)$ имеет форму распространяющейся волны, фронт которой движется по закону

$$v_f(t) = \left(\frac{4-\beta}{\beta} \right)^{\beta/(4-\beta)}.$$

Функция $u(v, t)$ описывается тремя формулами в зависимости от значений показателя β :

$$\begin{aligned} u(v, t) &= \Phi \left\{ 2 \frac{\sqrt{\beta(2-\beta)}}{4+\beta} v_f V^{(4+\beta)/2\beta} \right\}, \quad 1 \leq \beta < 2; \\ u(v, t) &= \Phi \left\{ \frac{1}{3} (\ln v_f)^{-1/2} v_f V^{3/2} \right\}, \quad \beta = 2; \\ u(v, t) &= \Phi \left\{ \sqrt{\frac{2(\beta-2)}{4-\beta}} \left[\frac{2\beta(4-\beta)}{4+\beta} \right]^{(4-\beta)/2\beta} \times \right. \\ &\left. \times v_f^{(4+\beta)/\beta} V^{(4+\beta)/2\beta} \right\}, \quad 2 < \beta < 4, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $V = (v - v_f(t))/v_f(t)$.

Условия применимости решения (3.21) имеют форму сильных неравенств:

$$v \gg 1, \quad v_f(t) \gg 1, \quad |v - v_f(t)| \ll v_f(t).$$

Заметим, что $u(v_f(t), t) = 1/2$. Как обычно, определим ширину фронта:

$$\Delta_f(t) = 2 \left| \frac{u(v, t)}{\partial u(v, t)/\partial v} \right|_{v=v_f} = \left| \frac{\partial u(v, t)}{\partial v} \right|_{v=v_f}^{-1}.$$

Следовательно, для случаев, рассмотренных выше, имеем

$$\begin{aligned} \Delta_f(t) &= \sqrt{\frac{\pi\beta}{2-\beta}}, \quad 1 \leq \beta < 2; \\ \Delta_f(t) &= \sqrt{\pi \ln v_f(t)}, \quad \beta = 2; \\ \Delta_f(t) &= \sqrt{\frac{\pi\beta}{2-\beta} \frac{2\beta(4-\beta)}{(4+\beta)^2}} [v_f(t)]^{2(\beta-2)/\beta}, \quad 2 < \beta < 4. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Видно, что ширина фронта $\Delta_f(t)$ существенно зависит от показателя β потенциала взаимодействия. Таким образом, $\Delta_f(t)$ является постоянной величиной при $1 < \beta < 2$. Поэтому в данном случае распространение $u(v, t)$ имеет характер волны со стабильным профилем, который не размывается во времени $t > 0$. При $\beta \geq 2$ фронт начинает постепенно размываться со слабой логарифмической зависимостью: $\Delta_f \propto \sqrt{\ln t}$. Поведение решения должно сохранять волновой характер. Скорость распространения фронта $v_f(t)$ больше скорости его размывания:

$$\frac{\partial \Delta_f / \partial t}{\partial v_f / \partial t} = \frac{d\Delta_f}{dv_f}.$$

3.2. Численное моделирование формирования неравновесных функций распределения частиц для стационарных согласованных источников и стоков

В данном разделе анализируется формирование квазистационарных неравновесных функций распределения для пространственно-однородной и изотропной плазмы, состоящей из одного сорта частиц, при наличии локализованных источников (стоков) частиц (энергии) в пространстве скоростей. Существование неравновесных функций распределения предполагает наличие в импульсном пространстве источника и стока частиц или энергии. Источник и сток энергии (частиц) могут обеспечиваться ионными пучками, мощным лазерным излучением, током эмиссии, потоками заряженных частиц, выделяемых при реакциях синтеза или деления, и т.п. Исследование основано на уравнении типа Ландау–Фоккера–Планка, которое является моделью уравнения Больцмана для произвольных потенциалов взаимодействия [21–26].

Сосредоточимся на численном изучении эволюции неравновесных функций распределения и их зависимости от различных входных параметров — интенсивности источников, степени их локализации в пространстве скоростей и т.д. В разделе 4 приведено сравнение результатов численного моделирования с результатами конкретного эксперимента по облучению полупроводника быстрыми ионами [29–32]. Для численного моделирования используются полностью консервативные разностные схемы [22–28].

Решаемая здесь задача имеет принципиальную трудность при численной реализации, а именно, нелинейность интеграла столкновений. Как было отмечено, в отсутствие внешних источников должны выполняться два закона сохранения, иначе диссипативные свойства схемы могут исказить результат, внося влияние фиктивных стоков или источников. Поэтому используются разностные схемы, должным образом учитывающие нелинейность моделируемого уравнения [26].

Для численного моделирования используется нелинейный оператор (3.3) с симметричным ядром $Q(v, w)$ для степенных потенциалов взаимодействия (3.7). Для заряженных частиц $\beta = 1$ ($n_1 = -3$), тогда $Q(v, w) = (2/3) w^3$ при $w < v$ и $Q(v, w) = (2/3) v^3$ при $w > v$.

Используя обычную процедуру приведения к безразмерному виду, перейдем к следующим переменным:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{v}{v_{th}}; \quad t' = \frac{\tilde{t}}{t_\beta}, \quad t_\beta = \frac{32\pi v_{th}^3}{ng_\beta} v_{th}^{4(\beta-1)/\beta}; \\ f' &= \frac{4\pi v_{th}^3}{n} f; \quad S' = \frac{4\pi v_{th}^3 t_\beta S}{n_S}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для построения разностной схемы бесконечный интервал в пространстве скоростей заменяется конечным отрезком $[0, v_{max}]$, который выбирается так, чтобы учесть высокоэнергетические частицы, и граничное условие для функции распределения будет иметь вид $f(v_{max}, t) = 0$. Источники S_+ и стоки S_- берутся главным образом в виде δ -функции:

$$S_\pm = \frac{I_\pm \delta(v - v_\pm)}{v^2}. \quad (3.24)$$

Если интенсивности источника и стока удовлетворяют соотношению $I_+ = I_- v_-^2 / v_+^2$, то энергия, которая приходит в систему извне, равна нулю, но плотность частиц в системе убывает (если источнику соответствуют большие скорости, чем стоку), т.е. в данной ситуации реализуется аналог постоянного потока энергии в импульсном пространстве с несохранением плотности частиц в системе. Поскольку мы имеем дело с заряженными частицами, при уменьшении плотности электронов в некоторой области из-за возникшего электрического поля туда начинают поступать тепловые электроны из соседней области. В рамках рассматриваемой однородной по пространству модели это можно учесть вводом ещё одного источника с такой интенсивностью I_{th} , чтобы не происходило уменьшение числа частиц, а значит, не возникало электрическое поле. Таким образом, можно сформулировать согласованную модель с двумя источниками с интенсивностями I_+ , I_{th} и одним стоком с интенсивностью I_- , в рамках которой не будет изменяться энергия и плотность частиц. Для этого интенсивности источников и стоков должны удовлетворять двум соотношениям:

$$I_{th} - I_- + I_+ = 0, \quad I_{th} v_{th}^2 - I_- v_-^2 + I_+ v_+^2 = 0. \quad (3.25)$$

Отсюда получаются интенсивности источников, выраженные через интенсивность стока I_- :

$$I_+ = I_- \frac{v_-^2 - v_{th}^2}{v_+^2 - v_{th}^2}, \quad I_{th} = I_- \frac{v_+^2 - v_-^2}{v_+^2 - v_{th}^2}. \quad (3.26)$$

Кроме того, в численных расчётах иногда рассматриваются источники (стоки), распределённые по скоростям

экспоненциально:

$$S_{\pm} \propto I_{\pm} \exp[-b(v - v_{\pm})^2]. \quad (3.27)$$

Такое выражение для источника или стока удобно использовать при исследовании зависимости неравновесных функций распределения от формы источника. Следует заметить, что, строго говоря, введение стоков, не зависящих от функции распределения, может быть весьма проблематичным. В такой постановке можно создать начальные условия, при которых решение станет отрицательным в области стока после некоторого промежутка времени. Поэтому часто источники (стоки) моделируются слагаемыми, пропорциональными искомо функции распределения, а именно:

$$S_{\pm} = I_{\pm} \frac{\delta(v - v_{\pm})}{v^2} f(v, t). \quad (3.28)$$

Напомним, что в дискретном случае функция $\delta(v - v_1)$ отлична от нуля лишь при $v = v_1$. Начальное распределение выбирается максвелловским или типа δ -функции. Следует отметить, что результаты практически не зависят от вида начальной функции распределения, за исключением самой начальной стадии. На каждом шаге по времени проводятся итерации, число частиц сохраняется с машинной точностью, а энергия сохраняется с точностью до 7–8 знака.

Далее обсуждаются основные результаты численных расчётов при наличии в импульсном пространстве потоков энергии либо частиц [29–31]. В правой части кинетических уравнений (3.3) имеются источник S_+ и сток S_- для обеспечения потока в импульсном пространстве. Вначале рассмотрим результаты решения, когда источник и сток согласованы с направлением потока в импульсном пространстве, переносимом в результате столкновений. Заметим, что аналитическое рассмотрение уравнений для локализованных источника и стока даёт правильное направление потока — от больших скоростей к малым. На рисунке 4 можно увидеть, что в интервале между источником и стоком со временем устанавливается стационарное неравновесное распределение (колмогоровского типа) частиц, соответствующее наличию потока энергии в импульсном пространстве, в то время как вне этого интервала функция распределения является термодинамически равновесной. Чтобы ещё раз убедиться в необходимости согласования расположения источника и стока с направлением потока в импульсном пространстве, были проведены расчёты с противоположным расположением в пространстве энергий источника и стока. На рисунке 5 приведён логарифм функции распределения в зависимости от квадрата (безразмерной) скорости при неправильном расположении источника и стока. Видно, что функция распределения частиц остаётся термодинамически равновесной при изменении интенсивности потока на несколько порядков — это подтверждает важность согласованного расположения источника и стока.

Для варианта, представленного на рис. 6, функциональная зависимость источника и стока от скорости имеет экспоненциальный тип. Источник S_+ расположен в "узкой" области вблизи энергий, соответствующих семи тепловым скоростям, а сток S_- тоже достаточно локализован в области четырёх тепловых скоростей. Область локализации источника и стока регулируется

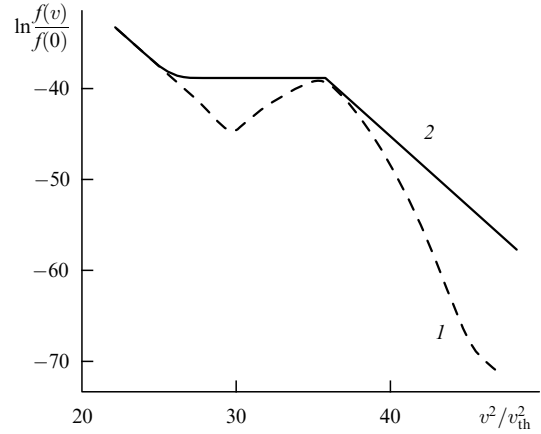


Рис. 4. Зависимость логарифма стационарной неравновесной функции распределения, нормированной на значение функции при $v = 0$, от квадрата безразмерной скорости. Расчёт сделан для максвелловской начальной функции распределения и функции источника с $I = 10^{-16}$, $v_- = 5$, $v_+ = 6$, для уравнения Ландау–Фоккера–Планка в моменты $t_2 = 100$ (сплошная линия), $t_1 = 25$ (штриховая).

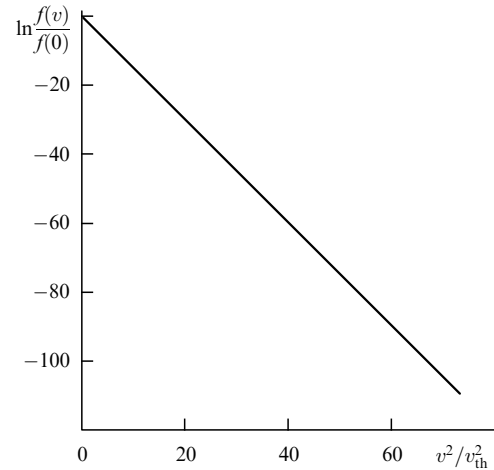


Рис. 5. Зависимость от квадрата безразмерной скорости стационарной (равновесной) функции распределения при неправильном расположении источника и стока, $v_+ = 5$, $v_- = 7$, полученной при расчёте по уравнению Фоккера–Планка, а также по уравнению Ландау для $\beta = 1, 2, 3$.

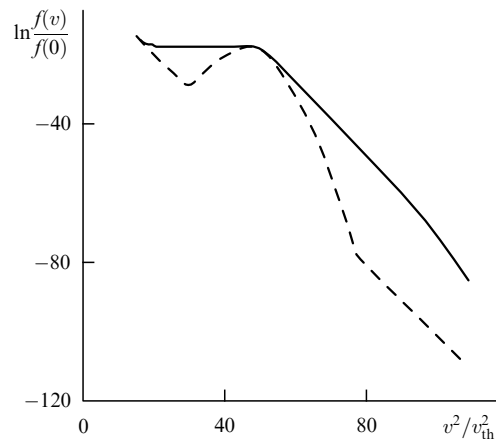


Рис. 6. Функция распределения, рассчитанная по уравнению Фоккера–Планка для источника (стока) $S_{\pm} \sim I_{\pm} \exp\{-\alpha_1(v - v_{\pm})^2\}$, $\alpha_1 = 100$, $v_- = 4$, $v_+ = 7$. Штриховая линия соответствует моменту времени $t = 25$, сплошная — $t = 100$.

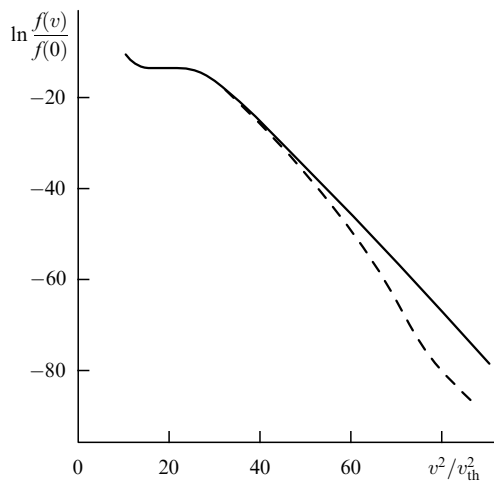


Рис. 7. Функция распределения, рассчитанная по уравнению Фоккера – Планка для источника (стока) $S_{\pm} \sim I_{\pm} \exp\{-\alpha_1(v-v_{\pm})^2\}$, $\alpha_1 = 10$, $v_- = 3$, $v_+ = 5$. Штриховая линия соответствует моменту времени $t = 25$, сплошная — $t = 100$.

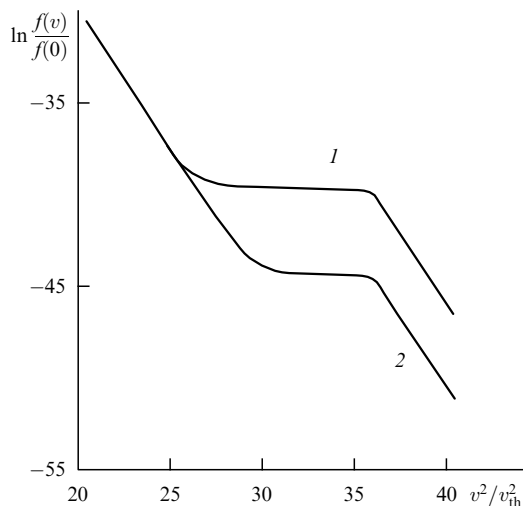


Рис. 8. Стационарная функция распределения, полученная из уравнения Ландау при $\beta = 2$ для источника (стока) в виде δ -функции (3.24) при различных интенсивностях потока $I = 0,01$ (1), $0,001$ (2) и $v_- = 4$, $v_+ = 6$.

значением коэффициента α_1 в экспоненциальной функции. В данном случае коэффициент α_1 очень велик (равен 100), что обеспечивает их сильную локализацию. Исследуем зависимость функции распределения электронов от степени локализации источника и стока в пространстве энергий. Для этого в следующем расчёте величина коэффициента α_1 была уменьшена на порядок: $\alpha_1 = 10$. Из сравнения результатов, представленных на рис. 6 и 7, видно, что характер стационарного неравновесного распределения в основной области между источником и стоком не зависит от степени локализации источника (стока), что свидетельствует о локальности функции распределения.

На рисунке 8 показана зависимость функций распределения от квадрата безразмерной скорости при различных интенсивностях потока. Установлено, что при малых интенсивностях источника I_+ (стока I_-) универсальное неравновесное распределение формируется в окрестности скоростей $v \leq v_+$, что обусловлено, во-

Таблица 1.

I	$f(3,95)$	$f(7,95)$	$f(8)$
10	$0,393 \times 10^{-9}$	$0,417 \times 10^{-10}$	$0,417 \times 10^{-10}$
1	$0,475 \times 10^{-9}$	$0,144 \times 10^{-10}$	$0,144 \times 10^{-10}$
0,1	$0,508 \times 10^{-9}$	$0,189 \times 10^{-11}$	$0,189 \times 10^{-11}$
0,01	$0,517 \times 10^{-9}$	$0,197 \times 10^{-12}$	$0,197 \times 10^{-12}$
0,001	$0,518 \times 10^{-9}$	$0,198 \times 10^{-13}$	$0,198 \times 10^{-13}$
0,0001	$0,519 \times 10^{-9}$	$0,196 \times 10^{-14}$	$0,196 \times 10^{-14}$

первых, уменьшением кулоновского сечения рассеяния с ростом скорости ($\sim v^{-3}$), а во-вторых, с имеющимся всегда потоком энергии и частиц (из-за кулоновской диффузии) в область основной, "фоновой" равновесной функции распределения. Поэтому с ростом интенсивности универсальное неравновесное распределение частиц формируется, занимая всё большую область между источником и стоком, что связано со снижением относительной доли потока, уходящего (передаваемого) в "фоновую" плазму. Следует отметить, что с повышением интенсивности возрастает и величина неравновесной функции распределения, так как она пропорциональна величине потока (2.6). Некоторые численные значения неравновесной стационарной функции распределения, полученной из решений уравнения Ландау, приведены в табл. 1, 2. Результаты представляют собой подробное исследование зависимости решения от меняющейся в широких пределах интенсивности потоков в импульсном пространстве. В качестве функции источника (стока) частиц выбрана функция (3.24), сток находится в точке $v_- = 4$, а источник — в точке $v_+ = 8$, $\Delta E = 0$. Последнее равенство означает, что поток энергии в импульсном пространстве остаётся постоянным, однако, поскольку не использовался дополнительный источник в тепловой области, плотность частиц не оставалась постоянной.

Из таблицы 1 видно, что значения функции распределения возрастают с увеличением интенсивности потока I , создаваемого источником и стоком. При низкой интенсивности (до 0,1) значения функции распределения возрастают пропорционально I , потому что большой вклад даёт взаимодействие неравновесных частиц (т.е. частиц из интервала между источником и стоком) с "фоновыми" частицами, которые имеют термодинамически равновесную функцию распределения. При средних интенсивностях (от 0,1 до 20) функция распределения является универсальной во всём интервале между источником и стоком и пропорциональна квадратному корню из интенсивности потока, в соответствии с выражением (2.6). При больших интенсивностях функция распределения не является пропорциональной квадратному корню из интенсивности потока, потому что интенсивность стока сама зависит от функции распределения в соответствии с выбранным видом стока (3.28).

Рассмотрим формирование неравновесной функции распределения частиц, соответствующей постоянному потоку энергии ($\Delta E = 0$, $I_+ = I_- v_-^2/v_+^2$) или частиц ($\Delta N = 0$, $I_+ = I_-$). Для сравнения результатов удобно представить графически функцию распределения, нормированную на значение функции в нуле (рис. 9). Видно, что как для потока частиц, так и для потока энергии формируются медленно убывающие распределения с близкими показателями s .

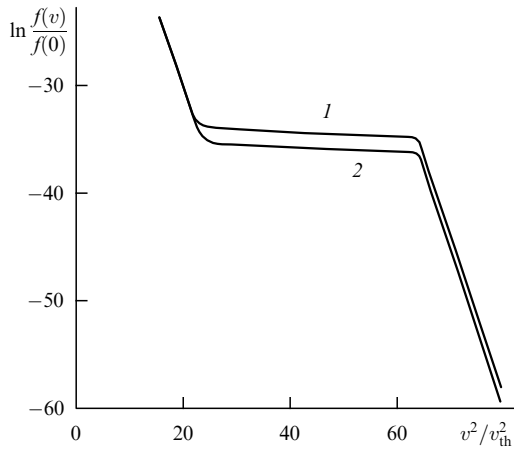


Рис. 9. Стационарная функция распределения, полученная из уравнения Ландау при $\beta = 1$ для источника (стока) в виде δ -функции (3.24); $|I_{\mp}| = 0,01, v_- = 4, v_+ = 8$. Кривая 1 соответствует постоянно-му потоку энергии ($\Delta E = 0$), кривая 2 — постоянно-му потоку частиц ($\Delta N = 0$).

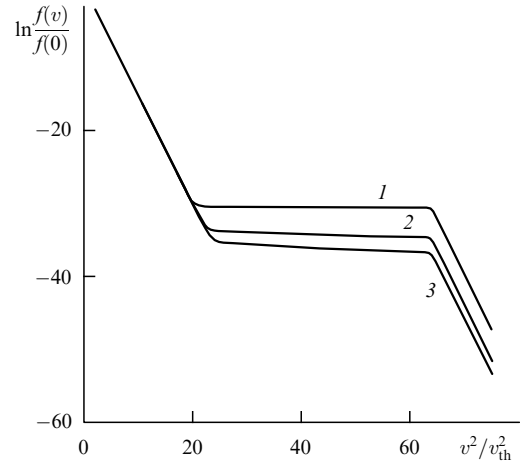


Рис. 10. Зависимость стационарных неравновесных функций распределения от квадрата скорости для постоянного потока энергии интенсивностью $I = -0,01$, для источника (стока) в виде (3.28) и $v_- = 4, v_+ = 8$. Кривые получены при расчёте по уравнению Ландау для показателей $\beta = 1$ (1), 2 (2), 4 (3).

Таблица 2.

β	1	1,5	2	3	4
$f(8)$	$0,197 \times 10^{-12}$	$0,123 \times 10^{-13}$	$0,266 \times 10^{-14}$	$0,771 \times 10^{-15}$	$0,384 \times 10^{-15}$

Интересным является исследование вида функции распределения при различных законах взаимодействия частиц между собой. Рассматриваются значения показателя степени $1 \leq \beta \leq 4$. Напомним, что $\beta = 1$ соответствует кулоновскому потенциалу взаимодействия, $\beta = 2$ — дипольному взаимодействию, а $\beta = 4$ описывает взаимодействие так называемых максвелловских молекул.

В таблице 2 представлена зависимость функции распределения $f(v_+)$ от показателя межчастичного взаимодействия β при $I = 0,01$. Видно, что при одной и той же интенсивности источника и стока значения функции распределения при одном и том же значении скорости уменьшаются по мере увеличения показателя β почти на три порядка. На рисунке 10 представлены неравновесные функции распределения для постоянного потока энергии интенсивностью $I = 0,001$ (сток и источник в виде (3.28) в точках $v_- = 4, v_+ = 8$ соответственно) и показателей $\beta = 1, 2, 4$. Видно, что для всех этих значений β формируются неравновесные функции распределения с близкими показателями степени s , что находится в соответствии с выводами [30]. С ростом показателя β абсолютная величина неравновесного участка функции распределения уменьшается. Эти результаты находятся в качественном согласии с приведёнными выше аналитическими результатами.

Рассмотрим эволюцию функции распределения в рамках изложенной выше самосогласованной, однородной по пространству модели с двумя источниками с интенсивностями I_+, I_{th} и одним стоком с интенсивностью I_- , в которой энергия и плотность частиц не изменяются со временем. При этом интенсивности источников, выраженные через интенсивность стока I_- , удовлетворяют соотношениям (3.26):

$$I_+ = I_- \frac{v_-^2 - v_{th}^2}{v_+^2 - v_{th}^2}, \quad I_{th} = I_- \frac{v_+^2 - v_-^2}{v_+^2 - v_{th}^2}.$$

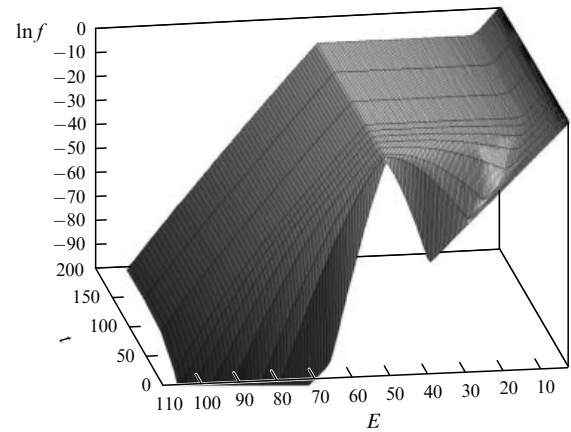


Рис. 11. Временная эволюция неравновесной функции распределения, полученной из уравнения Ландау при $\beta = 1$ для источников и стока в виде δ -функции (3.24); $I_- = -0,001, v_- = 2, v_{1+} = 1, v_{2+} = 7$.

На рисунке 11 приведена временная эволюция в рамках самосогласованной модели неравновесной функции распределения, полученной из уравнения Ландау для $\beta = 1$ и для источников и стока в виде δ -функции (3.24), при интенсивности стока $I_- = -0,001$, расположенного в точке $v_- = 2$, для двух источников в точках $v_{1+} = 1, v_{2+} = 7$ с соответствующими (приведёнными выше) интенсивностями. Видно, что функция распределения вне инерционного интервала является термодинамически равновесной, причём температура совпадает с первоначальной.

В инерционном (соответствующем постоянному потоку энергии между источником и стоком) интервале устанавливается практически не изменяющаяся с изменением скорости функция распределения (плато). Наиболее быстро функция распределения становится стационарной вблизи источника, формирование же функции распределения в области стока составляет несколько сотен безразмерных единиц времени (рис. 12, 13). Увеличение интенсивности потока (см. рис. 13) приводит к увеличению функции распределения, при этом совершенно не влияет на температуру равновесной функции распределения.

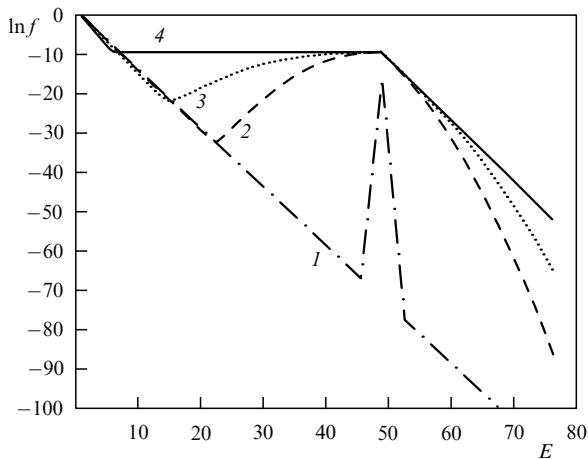


Рис. 12. Зависимость от энергии логарифма неравновесной функции распределения, полученной из уравнения Ландау при $\beta = 1$ для источников и стока в виде δ -функции (3.24), $I_- = -0,002$, $v_- = 2$, $v_{1+} = 1$, $v_{2+} = 7$, в различные моменты времени $t = 0,001$ (1), 10 (2), 20 (3), 200 (4).

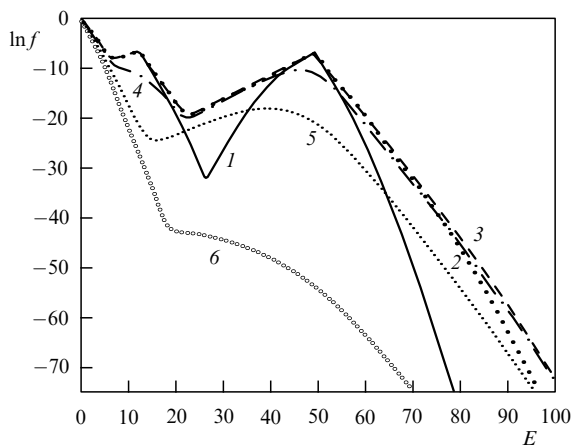


Рис. 13. Эволюция функции распределения при действии нестационарных источников и стационарного распределённого стока для различных моментов времени: $t = 5$ (1), 20 (2), 30 (3), 35 (4), 50 (5), 100 (6). Момент времени $t = 30$ соответствует времени выключения источников. Источники с равными интенсивностями $I_{1,2} = 0,01$ локализованы при скоростях $v_{1+} = 3,5$ и $v_{2+} = 7,0$, сток пропорционален функции распределения и действует в области $v_- \geq 2$.

3.3. Численное моделирование формирования неравновесных функций распределения частиц для нестационарных несогласованных источников и стоков

В приведённом в разделе 3.2 численном моделировании рассматривались либо невысокие интенсивности источника – стока, либо самосогласованная модель, в которой источники и стоки, во-первых, локализованы в импульсном пространстве, во-вторых, согласованы по интенсивности, т.е. имела место в чистом виде ситуация постоянного потока энергии (частиц) в импульсном пространстве. В этом случае с течением времени в инерционном интервале формировались стационарные неравновесные функции распределения.

Как показано в разделе 4, в реальной экспериментальной ситуации (например, облучение твердотельной плазмы потоком быстрых ионов) мы имеем дело не только с несогласованными по интенсивности источниками и стоками, но даже с нестационарными, т.е. с источниками,

действующими в течение конечного промежутка времени, заметно меньшего, чем время действия стоков. Кроме того, стоки, а иногда и источники, могут быть распределены почти по всей рассматриваемой области импульсного пространства. Как будет видно из дальнейшего изложения [29–31], в этом случае функции распределения будут квазистационарными или нестационарными.

Проанализируем эволюцию функции распределения при $\beta_{1,2,3} = 1, 2, 4$ под действием лишь источников небольшой интенсивности. Формирование неравновесного распределения может быть разделено на три стадии. В течение первого короткого периода система "помнит" начальные условия. Длительность этого периода не очень отличается для разных показателей β и равна приблизительно $t \approx 1$. В течение второй стадии происходит формирование основной части распределения. Продолжительность этой стадии существенным образом зависит от местоположения источника v_+ и при небольших интенсивностях не зависит от его интенсивности. Функция распределения принимает форму плато или имеет слабо убывающую зависимость между источником и холодной областью от величины интенсивности источника. Установление квазистационарного распределения заканчивается формированием хвоста распределения. Длительность этой стадии существенно зависит от показателя β . Эволюция основной части распределения в безразмерных единицах заканчивается при $t \approx 50$ для $\beta = 1$, при $t \approx 2$ для $\beta = 2$ и при $t \approx 1$ для $\beta = 4$.

3.4. Механизм формирования электронной функции распределения при взаимодействии потоков электромагнитного излучения и быстрых заряженных частиц с твердотельной плазмой

В данном разделе мы хотим обратить внимание на особенности проводящих и эмиссионных свойств, возникающие при действии на полупроводниковую плазму интенсивных потоков частиц или лазерного излучения.

1. Сравним времена релаксации энергии электронов за счёт электрон-электронных и электрон-фононных столкновений. При взаимодействии потоков интенсивного электромагнитного излучения вследствие ионизации образуются электроны с энергиями $E \geq \hbar\omega$, где ω — частота излучения. В случае облучения потоками частиц спектр энергии образовавшихся электронов простирается от десятков электронвольт до десятков килоэлектронвольт. Согласно [33], для электронов, обладающих достаточно большими энергиями E ($E \gg k_B T$), при высоких температурах $T > T_D$ (T_D — температура Дебая) частота электрон-электронных соударений определяется выражением

$$\gamma^{ee}(E, T) = \gamma_0^{ee}(T) \left[1 + \left(\frac{E}{k_B T} \right)^2 \right], \quad (3.29)$$

где $\gamma_0^{ee}(T)$ — классическая высокотемпературная частота межэлектронных соударений, пропорциональная T^2 . Частота электрон-фононных столкновений в тех же условиях записывается в виде [34]

$$\gamma^{ef} = \frac{f(T_D) T}{T_D}, \quad (3.30)$$

где $f(T_D)$ — классическая высокотемпературная частота соударений электрона с фононами при $T = T_D$. Для

обсуждаемых процессов выполнены условия, необходимые для справедливости формул (3.29) и (3.30), так как $E > 10$ эВ, $T = 300$ К, $T_D = 200-300$ К. Отметим, что величины, обратные частотам соударений, определённым согласно (3.29) и (3.30), в общем случае не совпадают с временами релаксации энергии электронов, так как следует ещё учесть число столкновений, необходимых для потери частицей своей энергии E , т.е. фактор $\xi = E/E_1$ (E_1 — энергия, теряемая электроном при одном соударении). Согласно данным [34], в рассматриваемом случае

$$\gamma^{ef} \approx \gamma_0^{ee}, \quad \gamma^{ee} \gg \gamma_0^{ee}, \quad (3.31)$$

тогда как фактор ξ для электрон-электронных соударений может быть порядка единицы, а для электрон-фононных — $E/k_B T_D > 3 \times 10^2$. Таким образом, в данном случае время релаксации энергии электрона за счёт электрон-электронных соударений значительно меньше времени релаксации благодаря электрон-фононным процессам.

Сравнение характерного времени ионизации и времён релаксации показывает, что электронная функция распределения в нашем случае будет квазистационарной, определяющейся в основном электрон-электронными соударениями. Следовательно, она может быть найдена из условия обращения в нуль интеграла столкновений Больцмана (Ландау – Фоккера – Планка).

Из приведённого анализа следует, что для полупроводниковой плазмы в областях энергий $E - E_F > E_F$ может существовать степенное распределение, отвечающее постоянному потоку энергии или частиц в импульсном пространстве. При этом распределение будет формироваться как за счёт соударений с электронами с энергиями, удовлетворяющими условию $E - E_F > E_F$, так и за счёт соударений с электронами основного фона (равновесными).

Показано, что неравновесная функция распределения электронов близка к универсальному распределению, если интенсивность потока в импульсном пространстве, создаваемого источником и стоком, достаточно велика.

2. Рассмотрим для примера облучение твердотельной плазмы потоком быстрых ионов (со скоростями, большими скоростей атомных электронов). Приведём типичную ситуацию на одном треке иона. Пусть энергия иона гелия $\varepsilon_i \approx 5$ МэВ, потенциал возбуждения $\Phi \approx 100$ эВ, длина пробега иона в веществе $R_{tr} \approx 10^{-3}$ см. Тогда на длине пробега ион гелия благодаря ионизации создаёт $10^4 - 10^5$ частиц, радиус трека ионизации соизмерим с длиной свободного пробега образовавшихся электронов ($R_e \approx 10^{-6}$ см), созданная одним ионом гелия в треке плотность электронов $n_{en} \approx 10^{19} - 10^{20}$ см $^{-3}$ при равновесной плотности $n_e \approx 10^{22}$ см $^{-3}$. При таком соотношении плотностей интенсивность источника (стока), как видно из предыдущего рассмотрения, достаточна для формирования неравновесной функции распределения.

Остановимся подробнее на каналах потерь энергии быстрым ионом в твердотельной плазме. Заметим, что даже при параметрах, характерных для инерциального термоядерного синтеза на ионных пучках, при взаимодействии ионных пучков с твердотельной плазмой отсутствует "эффект плотности пучка" (ср. с [35]), т.е. зависимость потерь энергии иона от плотности частиц в пучке. Принимая во внимание это обстоятельство, вычислим

потери энергии отдельного иона по формуле Бете – Блоха. Согласно [36, 37], энергия, потерянная быстрой нерелятивистской частицей, передаётся веществу двумя путями. Часть энергии расходуется на возбуждение коллективных колебаний кильватерной плотности заряда, другая часть передаётся отдельным электронам, приводя к их ионизации. Первая часть соответствует макроскопическим потерям энергии при дальних столкновениях и малых передачах импульса. Вторая часть соответствует столкновениям с большими переданными импульсами. На возбуждение коллективных колебаний расходуется относительно большая часть потерянной частицей энергии. Энергию $\Delta \varepsilon_k$, приходящуюся на колебания кильватерной плотности заряда, можно представить в виде [36, 37]

$$\frac{\Delta \varepsilon_k}{\Delta \varepsilon} = \frac{\ln(v/10v_0)}{2 \ln(v/v_0)}, \quad (3.32)$$

где $\Delta \varepsilon$ — полная потеря энергии частицей, v_0 — скорость электрона в основном состоянии атома водорода. Из (3.32) видно, что энергия колебаний кильватерной плотности заряда $\Delta \varepsilon_k$ по порядку величины сравнима с полной энергией, передаваемой частицей веществу.

При прохождении быстрой частицы через вещество имеются два равноправных механизма образования медленных электронов — лавинная ионизация и ионизация через плазменные колебания. Основные особенности, вносимые механизмом образования электронов ионизации через плазменные колебания, связаны как со значительным временем жизни колебаний кильватерного заряда, так и с заметной его пространственной протяжённостью. Большое время жизни кильватерного заряда приводит к тому, что вторичная ионизация внутри пучка происходит в течение длительного периода после прохождения частицы. Значительное число медленных электронов при каскадной ионизации получается при начале каскада с вторичного электрона большой энергии. Из-за большого полного пробега в веществе такого электрона при каскадной ионизации основное число медленных электронов образуется на расстояниях порядка пробега электрона. Поэтому ионизация кильватерным потенциалом является основным процессом, определяющим распределение электронов ионизации вблизи оси трека частицы, а каскадная ионизация обуславливает распределение электронов ионизации на расстояниях от оси трека порядка пробега электрона. Ионизация полем самой частицы имеет место только в моменты времени, соответствующие пролёту частицы, а кильватерные колебания плотности заряда играют роль линейного источника вторичных электронов, существующего долгое время после прохождения заряженной частицы, поэтому последние в полной мере определяют временное поведение картины ионизации.

Как отмечалось выше, несмотря на малость времени пролёта ионом трека, характерное время ионизации из-за лавинной ионизации кильватерной плотностью заряда достаточно велико, приблизительно равно 10^{-13} с.

При взаимодействии интенсивного электромагнитного излучения с твердотельной плазмой при частоте излучения, удовлетворяющей условию $\hbar \omega \gg k_B T$, образуется большое число высокоэнергетических электронов, которые и формируют в соответствии с приведённым

выше рассмотрением неравновесную стационарную функцию распределения электронов. Таким образом, при облучении как потоками интенсивного электромагнитного излучения, так и потоками быстрых частиц мы имеем дело с неравновесной функцией распределения электронов, которая формируется в инерционном интервале в результате электрон-электронных столкновений, описываемых интегралами столкновений Больцмана или Ландау–Фоккера–Планка, и существенно отличается от равновесной наличием большого числа высокоэнергетических электронов.

4. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения частиц

В разделе 3.4 показана возможность существования локальных неравновесных изотропных стационарных распределений частиц в столкновительной плазме. Существование таких функций распределения предполагает наличие в импульсном пространстве источника и стока частиц или энергии. Это имеет место при взаимодействии с плотной плазмой потоков заряженных частиц, лазерного или СВЧ-излучения, при протекании в плазме ядерных или термоядерных реакций и т.п. Ранее [12, 13, 15, 38] обращалось внимание на ряд важных следствий, которые, с одной стороны, вытекают из такого радикального изменения характера распределения частиц по энергиям, а с другой, имеют большое прикладное значение (влияние на затухание Ландау, критерий Лоусона в задачах управляемого термоядерного синтеза, астрофизические приложения и др.). Однако газовая плазма — среда крайне неустойчивая, в которой коллективные процессы играют особую важную роль и могут "затушевать" действие соударений между частицами. С этой точки зрения более привлекательной представляется твердотельная плазма, в которой можно управлять неравновесностью системы в устойчивом режиме. Здесь источник и сток энергии (частиц) может обеспечиваться ионными пучками, мощным лазерным излучением, током эмиссии, потоками заряженных частиц, выделяемых при реакциях синтеза или деления, и т.п.

В данном разделе мы хотим обратить внимание на особенности проводящих и эмиссионных свойств, возникающие при действии на металлы и полупроводники интенсивных потоков частиц или лазерного излучения. В связи с этим в разделах 4, 5 рассматриваются аномалии в эмиссионных свойствах металлов, которые позволяют создать новые источники тока и преобразователи энергии излучения в электрическую, имеющие существенные преимущества перед термоэмиссионными (см., например, [39]) по коэффициенту полезного действия и величине тока эмиссии [16].

4.1. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения электронов эмиссии, индуцируемой лазерным излучением

В работе [12] обращено внимание на возможность аномального увеличения фотопроводимости полупроводника при облучении его светом с частотой ω , недостаточной для межзонного перехода $\hbar\omega < V_g$, где V_g — ширина запрещенной зоны, за счёт формирования неравновесного распределения электронов и дырок. На основании экспериментальных исследований авторы работы [40] указывают на сильное изменение проводящих

свойств полупроводников при облучении их α -частицами.

Известно [41, 42], что при облучении металлических фольг наносекундным импульсом мощного лазерного излучения $Q = 10^{14}$ эрг $(\text{см}^2 \text{с})^{-1}$ наблюдаются два пика тока эмиссии. Первый, почти синхронный с лазерным импульсом, содержит большое количество "быстрых электронов" (для вольфрама максимальная энергия 14,5 эВ). Второй пик, следующий с задержкой $\tau \sim 10^{-7} - 10^{-8}$ с относительно первого, содержит электроны с энергиями, не превышающими 2 эВ. Удовлетворительное объяснение появления быстрых электронов максвелловской функцией распределения невозможно [43], так как экспериментальные результаты [41, 42] соответствовали бы температуре $T_e = 30000$ К, на порядок превышающей температуру плавления вольфрама. Что же касается величины тока эмиссии, то хорошо известны два механизма его возникновения: многоквантовый фотоэффект и термоэлектронная эмиссия, которые дают на много порядков меньшие токи эмиссии.

При использовании механизма, основанного на формирующейся в этих условиях неравновесной функции распределения электронов [13, 38], получается приемлемое значение тока эмиссии и его зависимость (быстрый пик) от задерживающего потенциала. Что же касается медленного пика, то, по-видимому, на его начальном участке в ток эмиссии даёт вклад не только равновесное распределение (термоэлектронная эмиссия), но и нестационарная неравновесная добавка, связанная с "развалом" степенного распределения.

При очень больших интенсивностях лазерного излучения, когда у поверхности твёрдого тела образуется плазменный слой, появление электронов высоких энергий может быть объяснено образованием солитона при резонансной накачке [44]. Однако такой механизм имеет ограниченную область применимости и непригоден для объяснения экспериментальных данных, полученных в работах Нехта [41, 42].

Таким образом, показано, что ряд экспериментальных данных по величине тока эмиссии из металла, индуцированной лазером, и зависимости его от задерживающего потенциала [41, 42] не могут быть объяснены в рамках равновесной функции распределения [43], однако получают удовлетворительное объяснение с помощью механизма [13, 38], опирающегося на наличие неравновесной ситуации.

4.2. Экспериментальные исследования неравновесных функций распределения электронов эмиссии, индуцируемой потоками быстрых ионов

Для описания кинетической электронной эмиссии, индуцированной ионами, используются теории, предложенные в работе [45] для низких энергий ионов и в [46] для диапазона высоких скоростей. Согласно механизму вторичной эмиссии, предложенному в работе [46], вторичные электроны образуются вследствие ионизации быстрыми ионами, описываемой теорией Бора–Бете, затем диффундируют к поверхности и выходят в вакуум. Коэффициент вторичной эмиссии L_e для этого механизма пропорционален удельным ионизационным потерям и не зависит от работы выхода ϕ , проводимости и других основных свойств вещества. Заметим, что для термического механизма эмиссии коэффициент L_e пропорционален квадрату удельных ионизационных потерь

и существенным образом (экспоненциально) зависит от работы выхода.

В обзорах и экспериментальных исследованиях [47–75] и цитированной в них литературе доказано, что коэффициент вторичной эмиссии Δ_e пропорционален потерям энергии быстрой частицы, т.е. подтверждён механизм, описанный в работе [46]. Следует отметить, что коэффициент пропорциональности κ в этой зависимости, практически не являясь функцией энергии падающего иона, существенно определяется материалом мишени, изменяясь в несколько раз при переходе от одного материала к другому. До исследований, основанных на неравновесных распределениях частиц, отсутствовало как теоретическое, так и эмпирическое выражение, связывающее значение коэффициента пропорциональности κ с параметрами мишени и энергией бомбардирующего иона.

Проведённое в работах [65, 75, 76] теоретическое рассмотрение вторичной электронной эмиссии из алюминия, индуцированной протонами и α -частицами, не позволяет предсказать наблюдающееся в экспериментах значение коэффициента κ и объяснить широкий (особенно на прострел) энергетический спектр вторичных электронов. Отметим, что большинство имеющихся экспериментальных результатов касается эмиссии на отражение. Однако, как показано в [54], энергетический спектр вторичных (на отражение) электронов не универсален при изменении энергии бомбардирующей частицы. При этом изменяется (см. [54, 70]) даже такая грубая характеристика, как отношение коэффициента вторичной эмиссии на прострел к коэффициенту вторичной эмиссии на отражение.

Как нам представляется, выражением для коэффициента вторичной электронной эмиссии Δ_e , имеющим наиболее наглядный физический смысл, является формула, предложенная в соответствии с [46] и [59] и использованная в [55]:

$$\Delta_e = \kappa \frac{d\varepsilon}{dx}, \quad \kappa = \frac{PL_e}{\varepsilon_e}, \quad (4.1)$$

где $d\varepsilon/dx$ — потеря энергии бомбардирующей частицей, P — вероятность преодоления поверхностного барьера внутренним вторичным электроном, L_e — глубина слоя, из которого выходят электроны эмиссии, ε_e — энергия, затрачиваемая на образование одного внутреннего вторичного электрона. В работе [59] предлагается брать ε_e такой же, как для соответствующего вещества в газовой фазе при нормальных условиях.

Мы полагаем, что коэффициент вторичной эмиссии Δ_e должен быть пропорционален потерям энергии на один атом, т.е. зависеть от плотности атомов N_a как $N_a^{-1/3}$, и обратно пропорционален потенциалу возбуждения Φ , учитывающему коллективный характер взаимодействия заряженной частицы с электронной подсистемой вещества. В соответствии с [77–79] формула Штерн-гласса модифицируется следующим образом:

$$\Delta_e = \frac{\zeta Z_{\text{eff}}^2}{\Phi N_a^{1/3}} \left(-\frac{d\varepsilon}{dx} \right)_p, \quad (4.2)$$

где $(-d\varepsilon/dx)_p$ — потери энергии протоном, имеющим скорость, равную скорости бомбардирующего иона; Z_{eff} — эффективный заряд иона в мишени; ζ — некоторая константа. При этом для $(-d\varepsilon/dx)_p$ целесообразно

Таблица 3. Коэффициенты, характеризующие вещество мишени

Вещество	a	b	c_1
Al	2,4	0,018	0,36
Be	2,42	0,001	0,37
Ci	2,92	0,018	0,4
Ni	6,8	0,01	0,77

использовать выражение, справедливое в диапазоне от нескольких килоэлектронвольт до 50 МэВ, приведённое в [80]:

$$\left(-\frac{d\varepsilon}{dx} \right)_p = \frac{ay + by^2}{0,01y^{2,55} + c_1}, \quad (4.3)$$

где y — скорость ($\times 10^8$ см s^{-1}); a, b, c_1 — коэффициенты, характеризующие вещество мишени и имеющие довольно чёткую периодическую зависимость от номера элемента Z_2 мишени. Так, коэффициент a повторяется с периодом, близким к $Z_2 = 18$. Значения коэффициентов a, b и c_1 для алюминия, бериллия, графита и никеля [80], которые используются в разделе 4.3, приведены в табл. 3.

Энергетическая зависимость коэффициента вторичной эмиссии Δ_e исследована достаточно подробно, описание же энергетического распределения эмитируемых электронов представляет достаточно сложную проблему. Результаты экспериментальных исследований энергетического спектра вторичных электронов, возникающих при прохождении протонов и α -частиц через тонкие плёнки, представлены в работах [47–79, 81–84]. Однако в [81–83] спектр изучен в узком интервале энергий (0–10 эВ) и лишь указано, что спектр имеет нетермическую природу, а в [54, 55, 79], хотя и проведены измерения в широком интервале энергий вторичных электронов (0–100 эВ), из-за несовершенства методики, заключающейся в использовании несферического анализатора, о виде функции распределения электронов можно судить только по интегральной характеристике, что не вполне удовлетворительно. В [54] доказано, что в широком интервале изменения энергии протонов (20–250 кэВ) энергетический спектр вторичных электронов на прострел является универсальной степенной функцией, тогда как для эмиссии на отражение такая универсальная зависимость отсутствует. Кроме того, показано, что коэффициент вторичной эмиссии на прострел почти вдвое превышает таковой на отражение. Легко увидеть, что, изучая энергетический спектр вторичных электронов эмиссии (ВЭЭ) сферическим анализатором для точечного источника ВЭЭ, можно получить функцию распределения электронов в металле. Ток эмиссии определяется выражением

$$I_{\text{em}} = B_1 \int_{\varphi + E_F + q_e U}^{E_{\text{max}}} Ef(E) dE, \quad (4.4)$$

где U — задерживающий потенциал, B_1 — константа, поэтому производная тока по задерживающему потенциалу пропорциональна функции распределения электронов:

$$\frac{dI_{\text{em}}}{dU} = B_2(\varphi + E_F + q_e U)f(\varphi + E_F + q_e U). \quad (4.5)$$

В случае, когда функция распределения электронов имеет степенной вид, построение графика зависимости dI_{em}/dU от $\varphi + E_F + q_e U$ в логарифмических координатах позволяет легко найти значение показателя степени по наклону кривой.

Для проверки теоретических представлений о механизме формирования электронной функции распределения при взаимодействии ионных потоков с твердотельной плазмой, сформулированных в разделах 2 и 3, проведён анализ экспериментальных исследований энергетического спектра вторичных электронов и зависимости коэффициента вторичной эмиссии на прострел Δ_e не только от потерь энергии α -частиц, протонов в веществе, но и потенциала возбуждения Φ .

Сравнение вольт-амперных характеристик для различных мишеней с учётом термоэлектронов позволяет сделать вывод, что механизм вторичной эмиссии не является термическим и вторичные электроны, выбитые из мишени α -частицами, распределены по закону, отличному от экспоненциального.

4.2.1. Исследование кинетической электронной эмиссии из металлов. Перейдём к изложению экспериментальных результатов по исследованию энергетического спектра вторичных электронов с помощью сферического трёхсечного анализатора. Такие измерения позволяют найти показатель степени s функции распределения электронов по энергии с помощью однократного дифференцирования вольт-амперной характеристики, поскольку в данном случае для области, где функция распределения степенная, имеем

$$\frac{dI_{em}}{dU} = B_3(\varphi + E_F + q_e U)^{s+1}, \quad (4.6)$$

где B_3 — константа.

Следовательно, в логарифмическом масштабе зависимость (4.6) представляет собой прямую с тангенсом угла наклона, равным $s + 1$.

Экспериментальные точки зависимостей $\lg(\Delta I_{em}/\Delta U)$ от $\lg(\varphi + E_F + q_e U)$ для алюминиевой и бериллиевой мишеней хорошо укладываются на три прямые, что соответствует различным показателям степени в интервалах 0–10 эВ, 10–40 эВ, 40–100 эВ. При этом показатели степени s для алюминия и бериллия различаются лишь в области малых энергий.

Исходя из выражения (4.3) для потерь энергии частицы с учётом значений коэффициентов a , b , и c_1 , можно объяснить отмечавшуюся в [64, 65] для алюминия и никеля зависимость коэффициента вторичной эмиссии Δ_e от энергии бомбардирующей частицы ε вида $\Delta_e \sim \varepsilon^{-0,73}$ в широком энергетическом интервале. Поскольку Φ [эВ] $\approx 13,5Z_2$ [85, 86], в интервале от 1 до 10 МэВ пробег α -частицы в веществе определяется эмпирической формулой [86, 87]:

$$R_{tr} = 0,174 \times 10^{-3} A_m^{1/3} \rho_m^{-1} \varepsilon^{3/2}, \quad (4.7)$$

где A_m , ρ_m — атомный вес и плотность вещества соответственно. Для оценок можно приближённо считать

$$\Delta_e \sim Z_{2\text{eff}}^2 \frac{\rho_m^{2/3}}{Z_2} V_b^{-1}, \quad (4.8)$$

где V_b — скорость бомбардирующей частицы. Формулы (4.7) и (4.8) дают правильное соотношение между коэф-

фициентами вторичной эмиссии Δ_e для алюминия, бериллия и графита. Высокие абсолютные значения Δ_e , полученные в [77, 79], объясняются существенным вкладом в эмиссию α -частиц, летящих под углом к нормали плёнки, так как для них потери энергии больше, чем для частиц, летящих по нормали.

Для устранения недостатка, имевшего место в работе [79], который заключался в усреднении энергетического спектра вторичных электронов по энергии бомбардирующих частиц и углу вылета вторичных электронов, были проведены экспериментальные исследования энергетического спектра вторичных электронов эмиссии, вызываемых бомбардировкой мишени пучком протонов при различных углах вылета электронов для Al, Cu, Be [78, 88]. Изучалась также зависимость коэффициента вторичной эмиссии на прострел не только от потерь энергии протонов с энергией 1 МэВ в веществе, но и от других макроскопических характеристик мишени. Вторичные электроны, выбитые из мишени, анализировались по энергиям методом задерживающего потенциала с использованием малоапертурного (4×10^{-4} стерадиан) трёхсечного анализатора, установленного под различными углами (30° , 45° , 75°) к направлению пучка. Коэффициент вторичной эмиссии определялся по отношению полного тока вторичных электронов I_e к току протонов I_p . Эксперименты проводились на мишенях толщиной 5,6 мкм из алюминия, 9,7 мкм из бериллия, 1,2 мкм из меди. Полученные экспериментальные зависимости I_e/I_p от U позволяют найти показатель степени s функции распределения электронов по энергиям с помощью однократного дифференцирования этих зависимостей, так как в данном случае для области, где функция распределения степенная, имеем

$$\frac{d}{dU} \frac{I_e}{I_p} = B_4(\varphi + E_F + q_e U)^{s+1}, \quad (4.9)$$

где B_4 — константа.

Следовательно, в логарифмическом масштабе график функции (4.9) представляет собой прямую с тангенсом угла наклона, равным $s + 1$. Показано, что экспериментальные точки для этих углов хорошо укладываются на три прямые, соответствующие различным показателям степени в интервалах 0–10 эВ, 10–40 эВ, 40–100 эВ. Эти показатели степени с хорошей точностью ($\sim 10\%$) совпадают с показателями степени, полученными с помощью сферического анализатора при облучении α -частицами тех же мишеней (см. выше [77]). Установлено, что показатели степени для разных мишеней различаются лишь в области малых энергий 0–10 эВ. Наряду с энергетическим спектром получены значения интегральной характеристики — коэффициента вторичной эмиссии Δ_e для мишеней из алюминия, меди и бериллия, которые составили соответственно 2,5; 1,6; 4,6. Как уже отмечалось выше, коэффициент Δ_e пропорционален потерям энергии быстрой частицы:

$$\Delta_e = \kappa \frac{d\varepsilon}{dx}, \quad (4.10)$$

где κ — коэффициент пропорциональности, изменяющийся в несколько раз при переходе от одного материала к другому.

Рассмотренные экспериментальные результаты для трёх мишеней находятся в соответствии с полученными

выше данными для алюминия и бериллия и данными [70] для графита. Коэффициенты L_e для различных мишеней соотносятся как обратные величины потенциала возбуждения Φ , умноженного на $N_a^{1/3}$. Отметим, что данные для меди [88] несколько хуже, но, возможно, это обусловлено несовершенством поверхностного слоя используемой медной плёнки.

Таким образом, экспериментальные исследования энергетического спектра вторичных электронов показали, что функция распределения электронов по энергии — существенно неравновесная и убывает с ростом энергии по степенному закону с показателями степени, одинаковыми в области энергий выше 10 эВ для различных материалов мишеней. Подтверждается предложенная теоретическая зависимость коэффициента вторичной эмиссии от потенциала возбуждения Φ и плотности атомов N_a .

Изучались распределения электронов по энергиям при ионно-электронной эмиссии, индуцированной пучками ионов H^+ с энергиями от 0,75 до 3,0 МэВ и H_2^+ с энергиями от 1 до 2,5 МэВ. Ток пучка ионов во всех экспериментах составлял 0,1–0,4 мкА, а диаметр пучка на мишени — 3 мм. В качестве мишеней выбирались тонкие фольги из серебра, меди, никеля и титана толщиной, меньшей длины пробега ионов H^+ и H_2^+ с данной энергией в веществе мишени. В вакуумной камере давление остаточных газов составляло 10^{-6} торр. Энергетические распределения вторичных электронов измерялись в сферическом анализаторе с тормозящим полем. Тормозящее поле создавалось между мишенью и двумя полусферами. Для предотвращения электронной эмиссии под действием потока налетающих частиц цилиндр Фарадея находился под антидинаatronным потенциалом (~ 20 В), создаваемым батареей. Ток цилиндра Фарадея усиливался электрометрическим усилителем. Сигнал с усилителя подавался на ПЭВМ типа ДЗ-28. Ток электронов, преодолевших тормозящее поле анализатора, собирался передней полусферой и после усиления сигнала также подавался на ПЭВМ. Измерялся ток эмиссии вторичных электронов I_e для двух интервалов энергии электронов U : 5–50 эВ с шагом 1 эВ, 35–200 эВ с шагом 5 эВ. Специально разработанные программы позволили автоматизировать операции предварительной обработки. При этом выражение (4.6) преобразовывалось к виду

$$y = (s + 1)x + a, \quad (4.11)$$

где $y = \lg(dI_e/dU)$, $x = \lg(U + E_F + \varphi)$, $a = \lg B_3$, после чего находились показатель s и параметр a . Качество фитирования характеризовал параметр

$$q_{\text{fit}} = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{y_{\text{exp}}}{y_{\text{theor}}} \right)^2. \quad (4.12)$$

Здесь N_y — число значений y , использованных при определении показателя s ;

$$y_{\text{exp}} = \lg \left(\frac{1}{U} \frac{dI}{dU} \right), \quad y_{\text{theor}} = \lg \left(\frac{1}{U} \frac{dI_{\text{theor}}}{dU} \right), \quad (4.13)$$

где функция dI_{theor}/dU рассчитана по формуле (4.6) с использованием найденных значений параметров s и B_3 .

Типичные графики спектра вторичных электронов аппроксимируются двумя прямыми в интервале от 5 до 30 эВ и от 30 до 200 эВ с разными значениями показателя степени.

Таблица 4. Значения показателей степени s (по модулю) в зависимости от энергии протона

E_p , МэВ	Титан	Никель	Медь	Серебро
0,75	5,4 2,28	5,6 1,88	7,74 1,81	6,54 2,7
1,0	5,15 2,0	4,66 1,45	6,36 1,64	6,52 2,54
1,5	5,95 2,64	5,38 2,32	5,8 0,86	6,42 1,98
2,0	7,16 2,93	5,53 2,78	5,77 2,85	4,38 2,08
2,5	6,06 2,12	4,58 1,64	5,01 2,11	5,25 1,96
3,0	5,66 1,88	4,32 1,66	5,73 2,67	6,34 2,7

Таблица 5. Значения показателей степени s (по модулю) в зависимости от энергии иона H_2^+

$E_{H_2^+}$, МэВ	Титан	Никель	Медь	Серебро
1,0	6,04 1,98	5,34 1,87	2,81 2,43	
1,5	4,66 1,82	3,40 1,18	5,36 2,36	6,73 2,0
2,0	4,56 1,49	4,09 1,57	3,66 2,16	6,11 2,54
2,5	4,31 1,28	8,73 2,62	5,73 2,67	5,48 2,7

В таблице 4 представлены значения показателя степени s для двух участков (верхнее и нижнее значения) в зависимости от энергии падающего пучка ионов H^+ для различных материалов мишени. В таблице 5 представлены эти же данные для пучка ионов H_2^+ .

Как видно из табл. 4, 5, в большинстве экспериментов показатель степени на первом участке (верхние значения) увеличивается с ростом энергетических потерь иона в веществе. На втором участке (нижние значения) столь строгой зависимости установить не удалось.

4.2.2. Исследование кинетической электронной эмиссии из полупроводников. Имеющаяся в литературе информация о возникающих при облучении пучками быстрых ионов эмиссионных свойствах материалов касается в основном металлов. Обращает на себя внимание отсутствие данных о широко используемых в фотоэмиссионной и электронной технике эффективных эмиттерах электронов. Наиболее распространены эффективные эмиттеры вторичных электронов на основе сурьмяно-цезиевых соединений. Благодаря своим высоким вторичным фотоэмиссионным и электронно-эмиссионным коэффициентам, которые обычно связывают с малым значением высоты потенциального барьера на границе поверхности образца с вакуумом, соединения такого типа активно используются в качестве фотокатодов и динодов в фотоэлектронных умножителях и других приборах [89, 90]. Так, значение коэффициента вторичной электронной

эмиссии составляет для сурьмяно-цезиевого соединения $A_e = 3-4$ при малых энергиях первичных электронов $E_e = 100$ эВ, а максимального значения $A_{e\max} = 8-10$ коэффициент ВЭЭ достигает при энергиях $E_e = 500-600$ эВ [89, 90]. Наличие значительных коэффициентов вторичной эмиссии является следствием не только низкой работы выхода из этого материала, но и, по-видимому, формирования неравновесных функций распределения степенного типа.

Исследование функций распределения электронов, формируемых в твердотельной плазме сурьмяно-цезиевого катода при бомбардировке его пучками быстрых лёгких ионов, проводилось на установке, подробно описанной в работе [32]. Электростатический ускоритель ионов Ван де Графа, используемый в качестве источника первичных частиц, позволял получать пучки ионов водорода H^+ и гелия He^+ . Измерения энергетических спектров электронов вторичной ионно-электронной эмиссии (ВИЭЭ) было проведено для пучков ионов H^+ с энергиями от 1,00 до 2,25 МэВ и He^+ с энергиями от 1,75 до 2,25 МэВ с шагом 0,25 МэВ. Исследуемый катод, используемый в качестве мишени, представлял собой сурьмяно-цезиевый слой толщиной, превышающей длину пробега бомбардирующих ионов в данном веществе, нанесённый на массивную никелевую подложку. Мишень диаметром 10 мм фиксировалась в медной оправке, которая крепилась на подвижном держателе. Пучок ионов, коллимированный с помощью системы диафрагм, падал на мишень и вызывал с её поверхности ВИЭЭ на отражение. Плоскость мишени располагалась перпендикулярно оси пучка. Диаметр пучка на мишени составлял 3 мм. Плотность ионного тока на мишени была не больше 30 мкА см⁻². Откачка камеры осуществлялась магниторазрядным насосом НМД-0,4-1 и форвакуумным насосом НВПР-16Д с азотной ловушкой. Во всех проведённых экспериментах давление остаточных газов в вакуумной камере составляло не более 10⁻⁶ торр. Электроны, эмитированные с поверхности мишени, собирались на сферическом коллекторе, состоящем из двух полусфер радиусом 100 мм. Мишень на держателе помещалась внутри коллектора. Зазор между полусферами составлял 15 мм. Входное окно полусферы имело диаметр 10 мм. Одновременно с измерением тока коллектора I_C регистрировался ток мишени I_T . Ток мишени представляет собой сумму тока ионов пучка I_B и тока достигших коллектора вторичных электронов: $I_T = |I_C| + I_B$. Измеряемые токи коллектора I_C и мишени I_T , усиленные электрометрическими усилителями, подавались через аналого-цифровой преобразователь в ЭВМ типа IBM PC. Для калибровки измерительной системы за задней полусферой располагался цилиндр Фарадея, позволяющий непосредственно регистрировать ток пучка ионов I_{FC} при выведенной из-под пучка мишени. Цилиндр Фарадея имел диаметр 20 мм и длину $l = 130$ мм. Ток цилиндра Фарадея I_{FC} измерялся при помощи токового прибора Ф303. Коэффициент ВИЭЭ определялся по формуле

$$A_{ie} = \frac{|I_C|}{|I_C| - I_T}. \quad (4.14)$$

Изучая энергетический спектр электронов ВИЭЭ с помощью сферического анализатора для точечного источника эмиссии, можно восстановить явный вид функции распределения электронов внутри твёрдого тела

[16, 32, 78]. В случае, когда функция распределения имеет степенной вид, производная тока эмиссии по энергии электронов dI/dU может быть представлена как

$$\frac{dI}{dU} = B(E_F + \varphi + eU)^{s+1}, \quad (4.15)$$

где B — константа. Следовательно, в логарифмическом масштабе зависимость (4.15) представляет собой прямую с тангенсом угла наклона, равным $s + 1$.

Энергетические распределения вторичных электронов эмиссии на отражение измерялись при помощи сферического коллектора в режиме энергоанализатора с тормозящим полем в интервале от 0 до 100 В с шагом 1 В. Тормозящее электрическое поле создавалось между мишенью и двумя полусферами. Поскольку радиус энергоанализатора значительно превышал размер мишени, распределение поля было близко к сферически-симметричному. Держателем мишени служила керамическая трубка диаметром 5 мм с нанесённым на её внешнюю поверхность резистивным слоем. Удельное сопротивление слоя R_l менялось по длине трубки нелинейным образом так, чтобы потенциал держателя не искажал поле внутри энергоанализатора. Мишень имела гальванический контакт с одним концом резистивного слоя, другой его конец заземлялся. Тормозящий потенциал подводился к мишени внутри керамической трубки от источника пилообразного напряжения, управляемого ЭВМ. Таким образом, ток, протекающий вдоль резистивного слоя, создавал необходимое распределение потенциала вдоль длины держателя. В процессе эксперимента вторичные электроны, двигаясь по радиальным траекториям, достигали коллектора. При подаче на мишень тормозящего напряжения на коллектор попадали только те электроны, энергия которых достаточна для преодоления тормозящего поля. Программа, которая осуществляла управление экспериментом, позволяла для каждого значения тормозящего поля в течение 7 секунд набирать статистику из 100 измерений тока электронов эмиссии. Затем программно проводилось усреднение по 100 экспериментальным точкам, и полученное в результате этой процедуры значение электронного тока записывалось в память ЭВМ. Дифференцируя измеренные таким образом зависимости тока коллектора от задерживающего напряжения (кривые задержки), можно получить энергетический спектр электронов ВИЭЭ, а затем восстановить функцию распределения.

Проведённые экспериментальные исследования энергетического спектра электронов ВИЭЭ показывают, что для всех энергий используемых ионов электронная функция распределения, формируемая в неравновесных условиях в плазме сурьмяно-цезиевого катода, имеет степенной вид.

На рисунке 14 представлена типичная функция распределения неравновесных электронов для исследуемого образца в случае бомбардировки его ионами He^+ с энергией 1,75 МэВ.

Экспериментальные точки хорошо укладываются на две прямые, соответствующие различным показателям степени в энергетических интервалах 5–30 эВ и 30–100 эВ. В результате обработки экспериментальных данных получены соответствующие показатели степени. В таблице 6 представлены значения показателей степени $-s_{E1}$ и $-s_{E2}$ для двух участков функции распределения, соответствующих указанным выше энергетическим

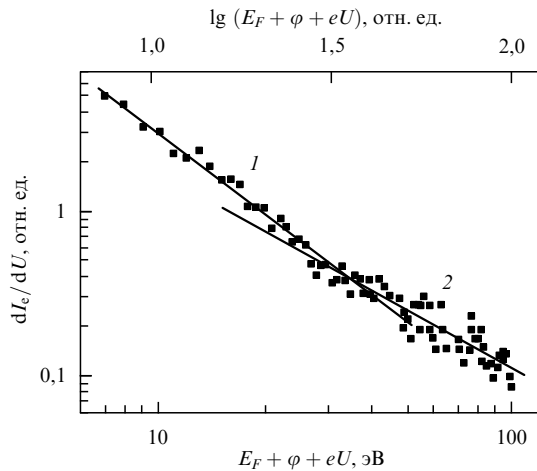


Рис. 14. Типичная зависимость $\lg(dI_e/dU)$ от $\lg(E_F + \varphi + eU)$ для сурьмяно-цезиевого катода в случае бомбардировки его ионами He^+ с энергией 1,75 МэВ. Участку 1 функции распределения (интервал энергий 5–30 эВ) соответствует показатель степени $s_{E1} = -2,9$, а участку 2 (30–100 эВ) — $s_{E2} = -2,5$.

Таблица 6.

Ион	Энергия, МэВ	$-s_{E1}$	$-s_{E2}$
H^+	1,25	2,9	2,5
	1,5	3,0	2,5
	1,75	2,9	2,5
	2,0	3,0	2,4
	2,26	3,0	2,6
He^+	1,75	2,9	2,5
	2,0	2,8	2,2
	2,26	2,8	2,3

интервалам, в зависимости от энергии бомбардирующих ионов H^+ и He^+ .

Как нам представляется, в общем случае показатель степени функции распределения вторичных электронов может иметь зависимость от энергии (удельных ионизационных потерь) быстрых ионов, так как интенсивность источника дополнительных частиц в импульсном пространстве определяется именно удельными ионизационными потерями иона. Как было указано в [13, 16, 17], только при некоторых определённых условиях показатель степени не зависит от структуры источника и стока. В этом случае говорят об универсальной функции распределения с показателем степени $-5/4$ [16]. В ранее проведённых экспериментах с пучком ионов He^+ и тонкими металлическими плёнками были измерены показатели степени s и показано, что абсолютная величина показателя степени s_{E1} функции распределения на первом энергетическом интервале, который соответствует области медленных электронов ($E < 35$ эВ), уменьшается с ростом удельных ионизационных потерь иона в веществе [91]. Авторы работы [57] указывают, что с ростом энергии налетающих ионов возрастает доля быстрых электронов. Как видно из табл. 6, показатели степени s_{E1} для различных энергий бомбардирующих ионов и, следовательно, различных удельных ионизационных потерь иона в сурьмяно-цезиевом образце различаются незначительно, хотя для протонов абсолютная величина показателя степени возрастает (убывает) с ростом энергии (удельных ионизационных

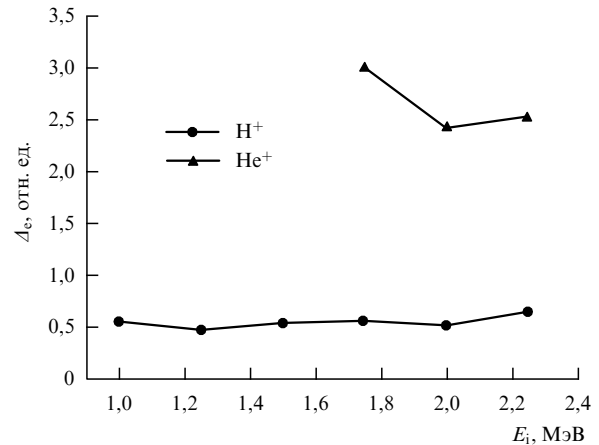


Рис. 15. Зависимость электронного выхода A_e от энергии падающих ионов H^+ и He^+ для сурьмяно-цезиевого катода.

потерь). Для ионов гелия такой зависимости не наблюдается. Следует заметить, что изменение показателя степени не превышает 10% и для установления его точной зависимости от потерь энергии требуются дополнительные исследования.

На рисунке 15 представлена зависимость электронного выхода A_e от энергии падающих ионов H^+ и He^+ для сурьмяно-цезиевого катода. Как видно из графика, значения электронного выхода A_e для исследуемого сурьмяно-цезиевого соединения превышают таковые для ряда металлических образцов [59]. Причина этого может заключаться в следующем. Как уже было сказано, часть образовавшихся при бомбардировке пучками быстрых заряженных частиц в твердотельной плазме неравновесных электронов диффундирует к поверхности и выходит в вакуум. Эмиссия электронов происходит с приповерхностного слоя, толщина которого значительно меньше глубины проникновения ионов и определяется закономерностями движения этих электронов к поверхности.

В приведённых результатах экспериментальных исследований [32] также указана зависимость электронного выхода A_e эмиссии, индуцированной ионами He^+ из германиевого образца, от удельных ионизационных потерь dE/dx ионов He^+ , которая хорошо аппроксимируется прямой, что подтверждает пропорциональность между этими величинами. Отметим, что рассматриваемые в [32] токи ионного пучка не превышают 10 мкА. В этом случае ток эмиссии существенно изменяется во времени, отражая нестационарное поведение источников и стоков в энергетическом пространстве. В каждом ионном треке электронная функция распределения имеет достаточно времени, чтобы пройти все стадии своего формирования, поэтому зависимость эмиссионного тока от задерживающего потенциала, наблюдаемая в эксперименте, является суперпозицией токов на всех временных стадиях существования нестационарной функции распределения электронов. На рисунке 16 представлена зависимость тока эмиссии от задерживающего потенциала [29–32]. Главный результат сравнения теоретических и экспериментальных данных заключается в том, что учёт нестационарности источников является существенным фактором, позволяющим объяснить зависимость тока от задерживающего потенциала при использовании экспериментальной методики сбора заряда, вылетающего со всей поверхности плёнки за достаточно

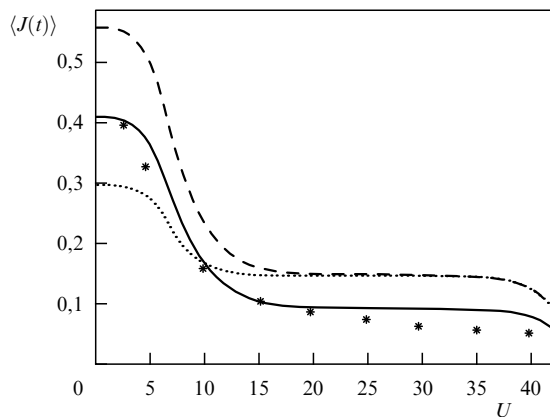


Рис. 16. Зависимость тока ион-электронной эмиссии от задерживающего потенциала для арсенида галлия (GaAs), бомбардируемого ионами H^+ с энергией 1,25 МэВ. Обозначен ток, усреднённый за время $t = 10$ (пунктирная кривая), 20 (штриховая), 100 (сплошная); звёздочками обозначены экспериментальные результаты [32].

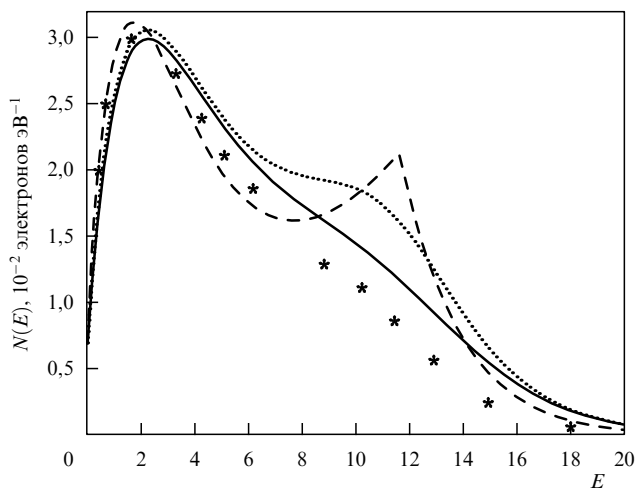


Рис. 17. Зависимость плотности электронов с энергией E $N(E) = f(v)v$ от энергии для электронов эмиссии, индуцированной 1 кэВ электронами из поликристаллического алюминия. Сплошная, штриховая и пунктирная кривые — результаты численного моделирования, звёздочки — экспериментальные данные [84].

длительный (несколько секунд) промежуток времени. На рисунке 17 сравниваются полученные численным путём плотности электронов $N(E) \sim f(v, t)v$ для нестационарных функций распределения электронов в различные моменты времени [30, 31] и наблюдаемые в эксперименте [84] для вторично-эмиссионных электронов, индуцированных 1 кэВ электронами из поликристаллического алюминия (Al). Энергия объёмного плазмона равна 15,5 эВ и работа выхода 5,25 эВ для Al [31, 84].

4.3. Прямое преобразование кинетической энергии частиц в электрическую энергию на основе неравновесных распределений частиц

На основе исследований, результаты которых представлены в разделах 4.1, 4.2, был предложен вторично-эмиссионный радиоизотопный источник тока [92–100], содержащий расположенный в герметичном корпусе в условиях достаточно высокого вакуума слой радиоизотопа, по обеим сторонам от которого помещены металлические эмиттеры. Их толщина не превышает длины пробега

в металле эмиттера заряженной частицы, излучаемой радиоизотопом. При этом каждый эмиттер выполнен в виде электрически изолированных вакуумными промежутками последовательно чередующихся слоёв двух разных металлов, коэффициенты вторичной электронной эмиссии которых различаются. Эффективность радиоизотопного источника тока такого типа определяется тем, что вторичные электроны образуются вдоль всего пути движения заряженной частицы в металле, т.е. энергия заряженной частицы непосредственно преобразуется в энергию электронов, количество и средняя энергия которых несоизмеримо выше, чем при термоэлектронной эмиссии. Установлено, что использование тяжёлых частиц в источниках электрического тока приводит к высокому коэффициенту образования вторичных электронов из-за пренебрежимо малого рассеяния этих частиц, так как их движение практически прямолинейно. Функция распределения вторичных электронов неравновесна, причём средняя энергия эмиттируемых вторичных электронов превышает 10 эВ. Коэффициент полезного действия источника увеличивается в результате повышения вторичной эмиссии под влиянием δ -электронов (см. [95–97]). Поэтому данный источник тока имеет высокие энергетические показатели, которые прямо пропорциональны количеству слоёв эмиттера. Поскольку общая толщина эмиттера не превышает длины пробега излучаемой радиоизотопом заряженной частицы, увеличить количество слоёв, а значит, и коэффициент полезного действия эмиттера возможно только за счёт уменьшения толщины каждого слоя. Однако при уменьшении толщины слоёв эмиттера они теряют свою конструкционную жёсткость, в связи с чем может нарушиться их электрическая изоляция, например, при прогибе, когда сокращается вакуумный промежуток между ними. Позже был предложен вторично-эмиссионный источник тока с достаточной конструкционной жёсткостью эмиттера при уменьшенной толщине его слоёв [98–100]. Эмиттер состоит из последовательно чередующихся электрически изолированных слоёв двух различных веществ (материалов) с неодинаковыми коэффициентами вторичной электронной эмиссии. Между слоями эмиттера расположены решётки из диэлектрического материала, предназначенные для электрической изоляции слоёв и повышения жёсткости конструкции эмиттера. При этом толщина диэлектрической решётки больше толщины слоя вещества эмиттера. Для наилучших результатов при реализации изобретения решётка из диэлектрического материала (керамики или пластмассы) должна быть нанесена непосредственно на один из слоёв эмиттера. Для повышения энергетической эффективности предложенного источника тока желательно один из чередующихся слоёв эмиттера изготовить из металла, а другой — из полупроводникового материала с коэффициентом вторичной электронной эмиссии, превышающим коэффициент для металла первого слоя.

5. Кинетика электрон-фононной системы кристалла, находящегося в сильном электрическом поле

В 1960-е гг. было обнаружено явление резкого уменьшения сопротивления металлов пластической деформации в случае возбуждения в них подсистемы электронов проводимости или облучением быстрыми заряженными

частицами, или пропусканием электрического тока высокой плотности $j = 10^8 - 10^9$ А м⁻². Оно не могло быть сведено к тривиальному термическому действию (в макроскопическом проявлении) тока, поэтому возникло предположение о существовании электрон-дислокационного взаимодействия, влияющего на механические свойства кристалла [101, 102].

Явление было предложено называть электропластическим эффектом (ЭПЭ). Механизм ЭПЭ связывался с повышением подвижности дислокации в области источников, а поэтому — с интенсификацией работы источников. В наиболее чистом виде ЭПЭ исследовался на металлических монокристаллах Zn, Cd, Sn, Pb [101]. Если в процессе деформации образцов этих материалов через них пропускать импульсы тока величиной $10^2 - 10^3$ А мм⁻² длительностью 10^{-4} с или облучать их ускоренными электронами в направлении скольжения, то обнаруживается ослабление прочности, проявляющееся в виде скачкообразного уменьшения деформирующего напряжения. Осцилляции напряжения связаны со скачками пластической деформации объектов. Установлено, что синхронно с прохождением импульсов тока и уменьшением деформирующего усилия появляются группы полос скольжения, а также что скачки деформирующего усилия на участке квазиупругой деформации намного меньше, чем за границей текучести. Эти осцилляции аномально высоки в районе границы текучести материала. Скачки деформирующего усилия на диаграммах уменьшаются при испытаниях в режиме релаксации напряжений. Характерной особенностью ЭПЭ в монокристаллах является отсутствие температурной зависимости в широком интервале от 77 до 300 К.

Показано, что с увеличением энергии электронов за порогом выбивания атомов (в случае цинка $E_{tr} \approx 0,7$ МэВ) на радиационную пластификацию металла накладывается эффект радиационного упрочнения благодаря созданию дополнительных стопоров для дислокаций в виде точечных дефектов и их ансамблей. При увеличении плотности электронов в одной посылке эффект радиационной пластификации сначала усиливается, а потом ослабевает. Ослабление эффекта объясняется влиянием возможного частичного вырождения электронного газа в металле на движение и взаимодействие дислокаций [102].

Показано, что активационный объём вследствие облучения металла электронами существенно не изменяется и увеличение скорости ползучести объясняется уменьшением времени (возрастанием частоты) процесса термоактивированного преодоления дислокациями препятствий [102].

5.1. Кинетическое описание эффекта электропластической деформации

Пластическая деформация кристаллов, находящихся под внешней нагрузкой, в большинстве случаев осуществляется путём скольжения дислокаций [103]. При этом основное уравнение (соотношение Орована), определяющее кинетику пластической деформации в плоскости скольжения, имеет вид

$$\dot{\epsilon}_d = b\rho_d V_d(\sigma^*, T), \quad (5.1)$$

где $\dot{\epsilon}_d$ — скорость пластической деформации; ρ_d — плотность подвижных дислокаций; b — величина их вектора Бюргерса; $V_d(\sigma^*, T)$ — средняя скорость перемещения дислокации на большие расстояния, зависящая

от эффективного сдвигового деформирующего напряжения $\sigma^* = \sigma - \sigma_i$ и температуры T ; σ_i — сдвиговые внутренние напряжения в плоскости скольжения (аналог сухого трения). В области достаточно низких σ^* движущаяся дислокация, сталкиваясь с локальными стопорами (примесными атомами или другими дефектами кристаллической структуры), может надолго задерживаться на них. Считается, что при не очень низких температурах механизм их преодоления дислокационными сегментами является термофлуктуационным. Тогда

$$V_d(\sigma^*, T) = lv(\sigma^*, T) = lv_0 \exp\left(-\frac{H(\sigma^*)}{k_B T}\right), \quad (5.2)$$

где l — среднее расстояние между стопорами; $v(\sigma^*, T)$ — частота их преодоления. Явный вид функции $H(\sigma^*)$ зависит от модели потенциального барьера, тормозящего скольжение дислокации (его высоты и формы), а также от распределения этих барьеров вдоль линии дислокации. Для обработки экспериментальных данных, как правило, принимают

$$H(\sigma^*) = H_0 \left(1 - \left(\frac{\sigma^*}{\sigma_{cr}}\right)^{p_0}\right)^{q_0}. \quad (5.3)$$

Если роль стопоров играют примесные атомы, то H_0 — это энергетический параметр дислокационно-примесного взаимодействия; σ_{cr} — критическое напряжение безактивационного движения дислокации сквозь сетку примесных барьеров в плоскости скольжения; p_0, q_0 — некоторые показатели степени, которые определяются при анализе экспериментальных кривых.

5.2. Математическая модель

Для количественного описания динамики электрон-фононной системы металлической плёнки в работе [104] использовано важное упрощающее предположение о фермиевском виде изотропной части электронной функции распределения с зависящей от времени электронной температурой. Авторы [104] отмечают, что введение электронной температуры, хотя и эквивалентно часто используемому предположению о мгновенной термализации электронной подсистемы, не всегда может быть строго обосновано. Так, в области очень низких температур $T_e < T^*$ (температура $T^* \approx T_D^2/E_F$), где электрон-электронные столкновения доминируют над электрон-фононными, электронная функция распределения термализуется за характерные времена электрон-электронного взаимодействия τ_{ee} . В обычных сравнительно чистых металлах $T^* \sim 1$ К, а в специально загрязнённых плёнках, в которых электрон-электронное взаимодействие усиливается из-за эффектов слабой локализации, T^* может быть порядка 10 К. При температурах $T_e > T^*$ (но $T_e < T_D$) релаксация электронов в относительно толстых плёнках происходит вследствие не прямого электрон-электронного взаимодействия, а косвенного, осуществляющегося через обмен фононами. Ранее одним из авторов [104] было показано, что электронная функция распределения, близкая по виду к фермиевской, формируется и в относительно тонких плёнках (из которых неравновесные фононы уходят в подложку без перепоглощения электронами) в результате лишь процесса излучения фононов "горячими" электронами. При рассмотрении использовалось достаточно сильное предположение о преобразовании всей полученной от элект-

рического поля энергии в температуру электронов, которое является необоснованным и, как будет видно из рассмотрения при не малых напряжённости электрического поля, не соответствует реальному решению задачи. В обоих случаях характерным временем термализации электронов является время электрон-фононных столкновений τ_{ep} . Заметим также, что в оптически толстых плёнках однородность электронной температуры по толщине плёнки обеспечивается быстрым уходом электронов из области скин-слоя и высокой электронной теплопроводностью по сравнению с фононной [103]. Вследствие дополнительного диффузионного уменьшения плотности "горячих" электронов скорость термализации электронной подсистемы существенно возрастает, и поэтому в оптически толстых плёнках приближение мгновенной термализации даёт хорошее согласие теоретических и экспериментальных результатов. В работе [104] рассматривался случай малых "нагревов", мы же при рассмотрении ЭПЭ имеем дело с очень большими "нагревами", поэтому нам необходимо провести последовательное кинетическое рассмотрение как электронной, так и фононной подсистем, что составляет основное содержание статей [30, 105, 106].

При кинетическом описании поведение электронов подчиняется уравнению Больцмана для функции распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ с соответствующими интегралами столкновений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{ee} + I_{ep} + I_{ed},$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e[\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)],$$

где I_{ee} — интеграл столкновений электронов с электронами, I_{ep} — интеграл столкновений электронов с фононами, I_{ed} — интеграл столкновений электронов с примесями и дефектами решётки, \mathbf{v} — скорость, \mathbf{r} — радиус-вектор, \mathbf{p} — импульс электрона, t — время, \mathcal{E} — напряжённость электрического поля, \mathbf{B} — магнитная индукция. В дальнейшем будем считать, что магнитное поле отсутствует.

Функция распределения фононов также подчиняется кинетическому уравнению с интегралами столкновений:

$$\frac{\partial N_p(\mathbf{q}_p)}{\partial t} + \mathbf{v}_q \frac{\partial N_p(\mathbf{q}_p)}{\partial \mathbf{r}} = I_{pe} + I_{pp} + I_{pd}, \quad (5.4)$$

где I_{pe} — интеграл столкновений фононов с электронами, I_{pp} — интеграл столкновений фононов с фононами, I_{pd} — интеграл столкновений фононов с примесями и дефектами решётки, $\mathbf{v}_q = \hbar \partial \Omega / \partial \mathbf{q}_p$ — скорость фонона, \mathbf{q}_p — импульс фонона, $N_p(\mathbf{q}_p)$ — функция распределения фононов. Учитывая, что соударения электронов с примесями, фононами и дефектами приводят к изотропизации функции распределения электронов, будем искать её в виде

$$f(\mathbf{p}, t) = f(E(p)) + \mathbf{f}_1(E(p)) \frac{\mathbf{p}}{p}. \quad (5.5)$$

Учитывая, что при столкновениях электронов с фононами передача энергии очень мала, упростим интегралы столкновений электронов с фононами, а именно, разложим изотропную часть функции распределения электронов по малой передаче энергии вплоть до ква-

дратичных членов:

$$f(\mathbf{p} \pm \mathbf{q}_p) \equiv f(E(\mathbf{p}) \pm \hbar \Omega(\mathbf{q}_p)) =$$

$$= f(E(p)) \pm \frac{\partial f(E(p))}{\partial E} \hbar \Omega + \frac{\partial^2 f(E(p))}{\partial E^2} \frac{(\hbar \Omega)^2}{2},$$

и подставим это разложение в интегралы столкновений. Учтём конкретный вид зависимости вероятности перехода $w(q_p)$, а также частот соударений фононов с фононами $v_{pp}(q_p)$:

$$w(q_p) = w_0 q_p, \quad w_0 = \frac{4\pi^2 m^2 \varepsilon_{1A}^2}{2(2\pi\hbar)^3 \rho},$$

$$v_{pp}(q_p) = v_{pp0} q_p^2, \quad v_{pp0} = \frac{T_{gr}^3 c_s}{a_{gr} T_D M_c},$$

$\hbar \Omega(q_p) = c_s q_p$, ε_{1A} — константа деформационного потенциала, T_{gr} — температура решётки, M_c — суммарная масса двух атомов, c_s — скорость звука, a_{gr} — параметр решётки.

Функции распределения как электронов $f(\varepsilon)$, так и фононов $N_p(q_p)$, являясь безразмерными, удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^3} \right)^{3/2} \int_0^\infty E^{1/2} f(E) dE = n, \quad (5.6)$$

где n — плотность электронов в валентной зоне (она же у металлов является и зоной проводимости, так как заполнена лишь частично),

$$\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\hbar^3} \right) \int_0^{q_D} q_p^2 N_p(q_p) dq_p < \infty, \quad (5.7)$$

q_D — дебаевский импульс фонона, который определяется из равенства $k_B T_D = c_s q_D$. Далее все величины приведены для никеля (для которого можно сравнить расчётные и экспериментальные результаты [108]): $c_s = 5 \times 10^5$ см s^{-1} , $T_D = 375$ К, откуда максимальный импульс фонона равен 103×10^{-19} г см s^{-1} , плотность электронов в валентной зоне $n = 2,5 \times 10^{22}$ см s^{-3} , плотность никеля $\rho = 8,9$ г см s^{-3} , постоянная решётки (расстояние между соседними атомами) $a = 3,5 \times 10^{-8}$ см.

В состоянии термодинамического равновесия функция распределения электронов $f(E)$ является функцией Ферми – Дирака

$$f(E) = \left[\exp \left(\frac{E - E_F}{k_B T_e} \right) + 1 \right]^{-1}, \quad (5.8)$$

где $E_F = 5 \times 10^{-12}$ эрг, T_e — температура электронной компоненты (в экспериментах она составляла 20 К и 80 К и совпадала с решёточной (фононной температурой) первоначально (до включения электрического поля $\mathcal{E} = 0,31$ СГСЭ = 94 В см s^{-1}). По остаточному сопротивлению никеля, $\rho_{cur} = 3 \times 10^{-6}$ Ом см, находим частоту столкновений электронов с примесями и дефектами решётки: $v_{ed} = 3 \times 10^{13}$ с s^{-1} . Частота электрон-фононных соударений зависит от величины импульса фонона следующим образом: $v_{ep} = v_{ep0} q/q_D$, $v_{ep0} = 2 \times 10^{10}$ с s^{-1} . Поскольку численное интегрирование электрон-электронного интеграла соударений представляет большие трудности из-за его нелинейности, а его роль состоит в перераспределении энергии, полученной от внешнего электрического поля, между электронами (квазитермализация), при интегрировании связанной системы для изотропных электронной и фононной функций распреде-

ления мы ограничились учётом только электрон-фононного и фонон-электронного интегралов соударений, но на временном промежутке t_{ee} , в течение которого вкладом интеграла электрон-электронных соударений можно пренебречь. При этом для времени t_{ee} взята оценка снизу из условия, чтобы энергия, выделяющаяся в проводнике при прохождении электрического тока, нагревала (предполагается, что электроны релаксировали за это время к термодинамически равновесному состоянию) электронную подсистему до температуры, соизмеримой с первоначальной, т.е.

$$\frac{\mathcal{E}^2}{\rho_{cur}} t_{ee} = c_p \rho T_e, \quad (5.9)$$

где $c_p = 25 \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$ — удельная теплоёмкость никеля. Из (5.8) получаем выражение для промежутка времени t_{ee} :

$$t_{ee} = c_p \rho T_e \frac{\rho_{cur}}{\mathcal{E}^2}. \quad (5.10)$$

Для напряжённости электрического поля $\mathcal{E} = 0,31 \text{ СГСЭ} = 94 \text{ В см}^{-1}$ время $t_{ee} = 45\tau_{ep0}$. В обратных частотах электрон-фононных соударений и предлагается измерять время в уравнениях для электронной и фононной функций распределения. Энергию электронов E и фононов $c_s q_p$ приводим к безразмерному виду делением на $k_B T_e$. Тогда система уравнений записывается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\tilde{p})}{\partial \tilde{t}} - \Delta \tilde{e} \frac{1}{\tilde{p}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left[\tilde{p}^2 \frac{\partial f(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}} \right] &= \frac{1}{\tilde{p}^2} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left\{ \frac{1}{\tilde{p}} \frac{\partial f(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}} \int_0^{2\tilde{p}} d\tilde{q}_p \tilde{q}_p^4 \left[N_p(\tilde{q}_p) + \frac{1}{2} \right] + \right. \\ &\left. + f(\tilde{p})(1 - f(\tilde{p})) \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{2\tilde{p}} d\tilde{q}_p \tilde{q}_p^3 \right\}, \quad (5.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_p(\tilde{q}_p)}{\partial \tilde{t}} &= \int_{q_p/2}^{\infty} d\tilde{p} \tilde{p} \left\{ \frac{1}{\alpha} f(\tilde{p})(1 - f(\tilde{p})) + [N_p(\tilde{q}_p) + 1 - f(\tilde{p})] \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{q}_p \frac{\partial f(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}} + \tilde{q}_p^2 \frac{\partial}{2\tilde{p}} \frac{\partial f(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}} \right] \right\}, \quad (5.12) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{t} = t v_{ep0}, \quad \Delta \tilde{e} = \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{6m v_{ep0} v_{ed} k_B T_e}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{2mk_B T_e}},$$

$$\tilde{q}_p = \frac{q_p}{\sqrt{2mk_B T_e}},$$

$$\alpha = \frac{mc_s^2}{2k_B T_e}, \quad 0 \leq \tilde{q}_p \leq 42,5.$$

Интегрирование приведённой системы уравнений (5.11), (5.12) проводилось с помощью полностью консервативных разностных схем. Консервативность схемы является обязательным требованием, так как она обеспечивает отсутствие накопления ошибок при расчётах на больших временах (см., например, [107]). Суть состоит в удовлетворении нескольким законам сохранения, в данном случае речь идёт об удовлетворении законам сохранения энергии и частиц.

5.3. Результаты численного моделирования и их обсуждение

В результате проведённых численных расчётов были найдены нестационарные функции распределения элект-

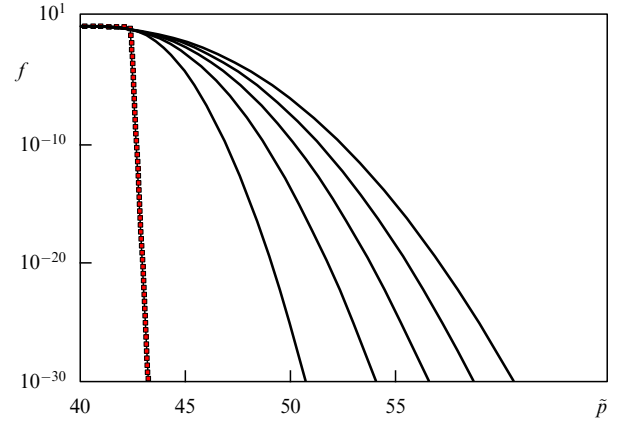


Рис. 18. Зависимость функции распределения электронов в различные моменты времени ($\tilde{t} = 0, 10, 20, 30, 40, 50$) от безразмерного импульса, кривые расположены слева направо соответственно увеличению \tilde{t} .

ронов $f(p)$ и фононов $N_p(q_p)$ по импульсам. На рисунке 18 представлена зависимость функции распределения электронов от безразмерного импульса в различные моменты времени. Крайняя левая кривая соответствует термодинамически равновесной функции, которая взята в качестве начальной при решении системы уравнений (5.11), (5.12). Из рисунка 18 видно (кривые с увеличением промежутка времени смещаются слева направо), что со временем функция распределения электронов всё более отличается от термодинамически равновесной.

Таким образом, установлено, что энергия, получаемая электронной подсистемой от внешнего электрического поля, в результате электрон-фононных столкновений частично (малая часть из-за квазиупругости электрон-фононных столкновений) передаётся фононной подсистеме, при этом большая её часть идёт не на установление термодинамически равновесной функции распределения электронов (как это часто предполагается (см., например, [104])), а на формирование интенсивных высокоэнергетических хвостов. Такое кардинальное изменение функции распределения электронов приводит к формированию фононной функции распределения, очень сильно обогащённой фононами с энергией, близкой к дебаевской. Мы получили существенное отличие от результатов работы [107], в которой фононная функция распределения в этой области импульсов практически соответствует функции Бозе–Эйнштейна, но имеет температуру, отвечающую температуре электронной подсистемы. Как показало наше численное моделирование, "температура" (точнее, средняя энергия электронов, так как электронная функция распределения сильно отличается от термодинамически равновесной) электронной функции распределения изменяется незначительно, т.е. не происходит термализации полученной от электрического поля энергии, а формируются высокоэнергетические хвосты, которые и приводят к такому кардинальному изменению фононной функции распределения. У функции распределения фононов со временем формируются всё более мощные высокоэнергетические хвосты, так как при электрон-фононных соударениях импульс передаётся при достаточно малой передаче энергии; рождается много фононов при дебаевской энергии, т.е. функция распределения фононов обогащается дебаевскими фононами. Далее проведём сравнение зависимо-

стей произведения функции распределения фононов на куб безразмерного импульса для термодинамически равновесного случая (функции Бозе–Эйнштейна) и фононной функции в различные моменты времени после начала действия электрического поля (рис. 19).

Таким образом, с помощью численного моделирования электрон-фононной системы, находящейся в сильном импульсном электрическом поле, с использованием полностью консервативных схем найдены неравновесные функции распределения электронов и фононов и показано следующее:

- изотропизация электронной функции распределения происходит вследствие столкновений с дефектами решётки;

- функция распределения электронов не становится термодинамически равновесной, потому что электрон-электронные столкновения в данной ситуации дают существенно меньший вклад, чем электрон-фононные, а

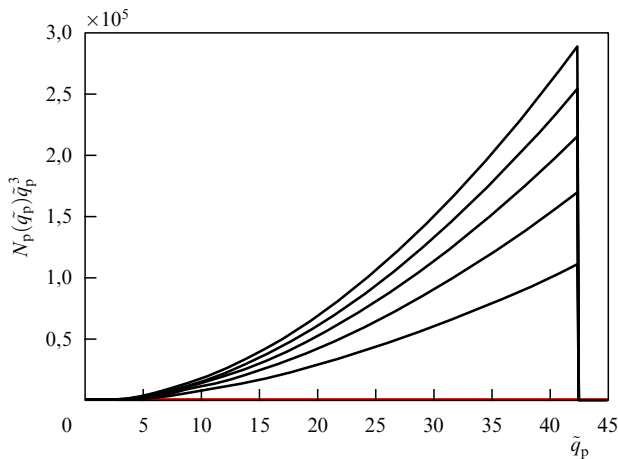


Рис. 19. Зависимость произведения функции распределения фононов (в моменты времени $\bar{t} = 0, 10, 20, 30, 40, 50$) на куб импульса от безразмерного импульса, кривые расположены снизу вверх соответственно увеличению \bar{t} .

столкновения с "чужой" подсистемой не приводят к термализации;

- функции распределения электронов и фононов имеют высокоэнергетические хвосты, потому что при электрон-фононных столкновениях передаётся импульс при достаточно малой передаче энергии;

- рождается много фононов около дебаевской энергии, т.е. функция распределения фононов обогащается дебаевскими фононами.

Так, на рис. 20а для иллюстрации приведены зависимости произведения функции распределения фононов на куб безразмерного импульса для термодинамически равновесной функции Бозе–Эйнштейна, соответствующей температуре подложки (штриховая кривая), стационарной фононной функции распределения из работы [107] (сплошная кривая) и неравновесной фононной функции распределения из работы [105] (точечная кривая) от безразмерного импульса. Зависимости приведены для следующих параметров: действующее электрическое поле $\mathcal{E} = 96 \text{ В см}^{-1}$, температура подложки $T_b = 4,2 \text{ К}$, толщина никелевой плёнки $d = 10^{-4} \text{ см}$, электронная температура, которая устанавливается, согласно результатам работы [107], $T_e = 41,68 \text{ К}$.

Из рисунка 20 видно, что при действии электрического поля $\mathcal{E} = 96 \text{ В см}^{-1}$ кривая зависимости произведения функции распределения фононов на куб безразмерного импульса для термодинамически равновесной функции Бозе–Эйнштейна с температурой подложки практически совпадает с результатом для стационарной (частично неравновесного приближения) фононной функции распределения из работы [107] для фононов с малыми импульсами и достаточно сильно (почти на два порядка) отличается от кривой для фононов с большими импульсами. Но, как видно из рис. 20, это не приводит к существенному возрастанию эффективной температуры, которая и определяет эффекты электропластической

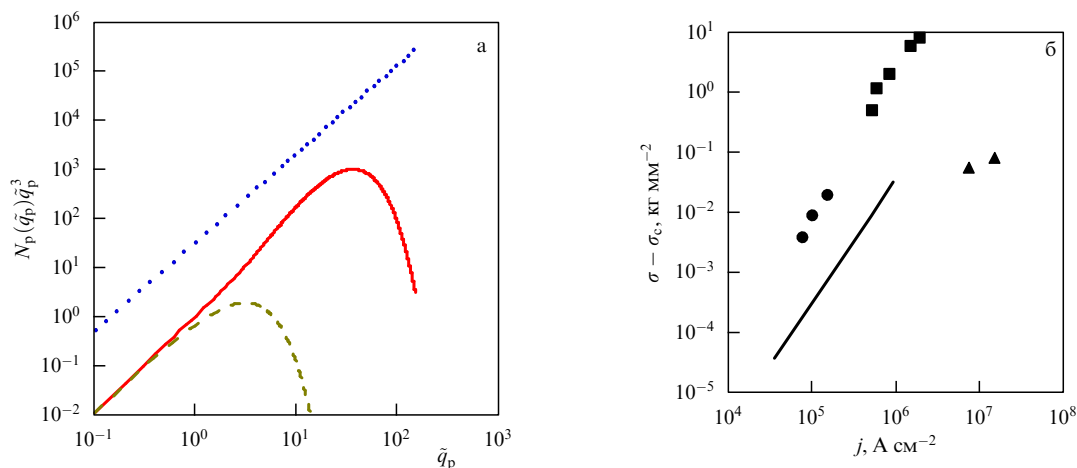


Рис. 20. (а) Зависимость произведения функции распределения фононов на куб безразмерного импульса для термодинамически равновесной функции Бозе–Эйнштейна, соответствующей температуре подложки (нижняя штриховая кривая), стационарной фононной функции распределения из работы [107] (сплошная кривая) и неравновесной фононной функции распределения из работы [105] (точечная кривая) от безразмерного импульса \bar{q}_p при действии электрического поля $\mathcal{E} = 96 \text{ В см}^{-1}$. (б) Зависимость уменьшения нагрузки при постоянной скорости деформации от плотности тока. Сплошная кривая — джоулев нагрев; треугольники — неравновесное рассмотрение, теоретические зависимости; кружки — данные [27, 28] при $T_{\text{start}} = 78 \text{ К}$, квадраты — экспериментальные данные, полученные Лебедевым при $T_{\text{start}} = 293 \text{ К}$ для постоянной скорости деформации $\dot{\epsilon}_d = 2,7 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ и параметров: $\rho_d = 10^8 \text{ см}^{-2}$, $l = 10^3 b$, $b = 3,52 \times 10^{-8} \text{ см}$, $x_c = 2b$, $U_0 = 8 \times 10^{-13} \text{ эрг}$, $L = 10^{-4} \text{ см}$, $\mu = 1,2 \times 10^{12} \text{ дин см}^{-2}$.

деформации. Неравновесная фононная функция распределения из работы [105] даёт произведение функции распределения фононов на куб безразмерного импульса во всей области импульсов фононов, более чем на два порядка превышающее произведение для частично неравновесной ситуации. Рассчитанный для неравновесного случая эффект снижения напряжения нагрузки находится в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

Проведём сравнение зависимости уменьшения напряжения нагрузки от плотности электрического тока, пропускаемого через тонкий металлический образец при обеспечении стационарной скорости деформации, (экспериментальная зависимость получена В.П. Лебедевым) с теоретической, полученной в разделе 5.3. Согласно рассмотрению модели Ландау–Гофмана [108] и формулам (5.1)–(5.3) выведено выражение для скорости пластической деформации:

$$\dot{\varepsilon}_d = b\rho_d l v_0(T) \exp \left[-\frac{bL^2\sigma_c^2}{4S\mu k_B T_{\text{eff}}(T)} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^2 \right].$$

Поскольку в экспериментах скорость деформации была стационарной, получаем соотношение между скачками нагрузки и эффективной температурой, выражение для которой приведено в [105]:

$$\delta\sigma = \sigma(j=0) - \sigma(j) = 10^{-8}\sigma_c \left[\sqrt{a(j)T_{\text{eff}}(j)} - \sqrt{a(0)T_{\text{eff}}(0)} \right],$$

$$a(0) = a(T_{\text{start}}), \quad T_{\text{eff}}(0) = T_{\text{eff}}(T_{\text{start}}), \quad \sigma_c = \frac{2}{bL} \frac{U_0}{x_c},$$

$$a(T) = \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0(T)}{\dot{\varepsilon}_d} \right) \frac{4\mu S k_B}{bL^2\sigma_c^2}, \quad \dot{\varepsilon}_0(T) = b\rho_d l v_0(T),$$

где $T(j)$ выражается через джоулев нагрев в равновесном случае или через соответствующую эффективную температуру, которая определяется неравновесной фононной функцией распределения. Подставляя в это соотношение параметры, отвечающие эксперименту, получаем теоретическую зависимость, которая вместе с экспериментальными данными приведена на рис. 20б. Из проведённого анализа и рис. 20 видно, что зависимость уменьшения напряжения нагрузки при постоянной скорости деформации от плотности тока, которая удовлетворительно может описать экспериментальную зависимость, невозможно получить (различие составляет 2–3 порядка) ни из термодинамически равновесного подхода, ни из частично неравновесного, предложенного в работе [107]. Поэтому для пояснения аномальных электропластических свойств металлов и полупроводников, наблюдаемых в экспериментальных исследованиях, более перспективным является нахождение неравновесной функции распределения фононов, которая является решением рассмотренной двухкомпонентной электрон-фононной системы уравнений [105, 106].

6. Заключение

В обзоре представлено современное состояние исследований неравновесных стационарных и нестационарных распределений электронов с потоком по спектру в твердотельной плазме и их использования для разработки принципиально новых радиоизотопных источников тока.

На основе исследования интеграла столкновений Больцмана показано, что в однородной и изотропной среде для нерелятивистских заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона с учётом статического экранирования, для локализованных в импульсном пространстве источника и стока существует локальное стационарное неравновесное распределение частиц, отвечающее постоянному потоку энергии $I_1: f^{(i)}(p) = A_i I_i p^{2s_i}$, $s_i = -(3D - 4/\beta + 2(i - 1))/4$, где D — размерность пространства, β — показатель степени в законе взаимодействия частиц ($\beta = 1$ для кулоновского взаимодействия), $s_{i=1} = -5/4$. Это стационарное неравновесное распределение является точным решением также для интеграла столкновений в форме Ландау. Для электронов в твердотельной плазме, взаимодействие между которыми описывается экранированным кулоновским потенциалом, может быть сформирована локальная неравновесная функция распределения, которая соответствует постоянному потоку энергии в импульсном пространстве. Аналитическое рассмотрение проведено для стационарных локализованных в импульсном пространстве источника и стока. Численное моделирование в рамках интеграла столкновений Ландау–Фоккера–Планка с помощью полностью консервативных разностных схем позволяет находить неравновесные функции распределения частиц для нелокализованных, нестационарных и несогласованных в импульсном пространстве источника и стока (как это имеет место, например, при ионизации прямыми столкновениями и кильватерными волнами). Определены условия существования и интенсивность потока энергии в импульсном пространстве, позволяющие сформировать неравновесную функцию распределения при энергиях электронов, превышающих энергию Ферми. Показано, как полученные результаты могут быть использованы для предсказания поведения полупроводников с собственной и с примесной проводимостью при облучении их пучками быстрых ионов или лазерным излучением. Имеющиеся и приведённые результаты экспериментальных исследований энергетических и угловых распределений электронов вторичной эмиссии, индуцированной ионами, в том числе молекулярными ионами, свидетельствуют о важности ионизации кильватерными полями, возбуждёнными ионами. Экспериментальные результаты находятся в хорошем соответствии с теоретическими предсказаниями. На основе теоретических исследований неравновесных распределений электронов, индуцированных потоками ионов, в твердотельной плазме предложен новый способ преобразования энергии радиоактивного распада в электрическую. Проведено подробное сравнение источника тока, базирующегося на этом способе, с существующими. Рассмотрены достоинства и недостатки каждого типа существующих радиоизотопных источников тока. Показаны преимущества предложенного источника тока и конкретный пример его реализации.

Исследован и установлен механизм ЭПЭ в рамках модели дислокационной струны, преодолевающей стопоры в результате возбуждения её колебаний фононами. С помощью численного моделирования электрон-фононной системы, находящейся в сильном импульсном электрическом поле, на основе полностью консервативных схем найдены неравновесные функции распределения электронов и фононов и показано, что функции распределения электронов и фононов имеют высоко-

энергетические хвосты, т.е. рождается много фононов около дебаевской энергии и функция распределения фононов обогащается дебаевскими фононами.

На основе модели случайных толчков (в рамках метода Ланжевена), которые в нашей задаче совершают фононы, показано, что

— термодинамический подход не может описать эффект электропластической деформации;

— на основе найденной реальной функции распределения фононов, которая является решением двухкомпонентной электрон-фононной системы уравнений при действии на металл сильного импульсного электрического поля, можно объяснить аномальные электропластические свойства металлов и полупроводников, наблюдающиеся в экспериментальных исследованиях, т.е. ЭПЭ.

Авторы сожалеют о том, что из-за ограниченного объема обзора не смогли привести некоторые важные и интересные результаты. Для частичного устранения этого пробела в список литературы включены несколько обзоров [109–114].

Список литературы

- Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941) [Kolmogoroff A N *C.R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR* **30** 301 (1941)]
- Захаров В Е *Журн. приклад. мех. тех. физ.* (4) 35 (1965) [Zakharov V E *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **6** (4) 22 (1965)]
- Силин В П *Введение в кинетическую теорию газов* (М.: Наука, 1971)
- Rosenbluth M N, MacDonald W M, Judd D L *Phys. Rev.* **107** 1 (1957)
- Трубников Б А, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 1 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 98 [Trubnikov B A, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 1 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1965) p. 105]
- Гуров К П *Основания кинетической теории. Метод Н.Н. Боголюбова* (М.: Наука, 1966)
- Gurov K P, in *Nonequilibrium Phenomena I: the Boltzmann Equation* (Eds J L Lebowitz, E W Montroll) (Amsterdam: North-Holland, 1983) [Гуров К П, в сб. *Неравновесные явления. Уравнение Больцмана* (Под ред. Дж Л Либовица, Е У Монтролла) (М.: Мир, 1986)]
- Chapman S, Cowling T G *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases; an Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction, and Diffusion in Gases* (Cambridge: Univ. Press, 1952) [Чепмен С, Каулинг Т *Математическая теория неоднородных газов* (М.: ИЛ, 1960)]
- Ахиезер А И, Померанчук И Я *Некоторые вопросы теории ядра* (М.–Л.: Гостехиздат, 1948)
- Кац А В и др., Препринт № 42 (Харьков: ИРЭ АН УССР, 1974)
- Кац А В и др. *Письма в ЖЭТФ* **21** 13 (1975) [Kats A V et al. *JETP Lett.* **21** 5 (1975)]
- Карась В И *Письма в ЖТФ* **1** 1020 (1975) [Karas' V I *Sov. Tech. Phys. Lett.* **1** 438 (1975)]
- Карась В И, Моисеев С С, Новиков В Е *ЖЭТФ* **71** 1421 (1976) [Karas' V I, Moiseev S S, Novikov V E *Sov. Phys. JETP* **44** 744 (1976)]
- Градштейн И С, Рыжик И М *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971) [Gradshteyn I S, Ryzhik I M *Tables of Integrals, Series, and Products* (New York: Academic Press, 1980)]
- Кац А В и др. *ЖЭТФ* **71** 177 (1976) [Kats A V et al. *Sov. Phys. JETP* **44** 93 (1976)]
- Карась В И, Автореферат дисс. ... докт. физ.-мат. наук (Харьков: Харьковский гос. ун-т им. А.М. Горького, 1988)
- Карась В И, Моисеев С С, Шуклин А П *Укр. физ. журн.* **25** 820 (1980)
- Самарский А А *Теория разностных схем* (М.: Наука, 1977) [Samarskii A A *The Theory of Difference Schemes* (New York: Marcel Dekker, 2001)]
- Самарский А А, Попов Ю П *Разностные схемы газовой динамики* (М.: Наука, 1975)
- Bobylev A V *Sov. Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev.* **7** 111 (1988)
- Бобылев А В, Чуянов В А *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* **16** 407 (1976) [Bobylev A V, Chuyanov V A *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **16** (2) 121 (1976)]
- Потапенко И Ф, Чуянов В А *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* **19** 458 (1979) [Potapenko I F, Chuyanov V A *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **19** (2) 192 (1979)]
- Потапенко И Ф, Чуянов В А *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* **20** 513 (1980) [Potapenko I F, Chuyanov V A *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **20** (2) 249 (1980)]
- Бобылев А В, Потапенко И Ф, Чуянов В А *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* **20** 993 (1980) [Bobylev A V, Potapenko I F, Chuyanov V A *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **20** (4) 190 (1980)]
- Бобылев А В, Потапенко И Ф, Чуянов В А *ДАН СССР* **255** 1348 (1980) [Bobylev A V, Potapenko I F, Chuyanov V A *Sov. Phys. Dokl.* **25** 994 (1980)]
- Потапенко И Ф, Чуянов В А *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* **22** 751 (1982) [Potapenko I F, Chuyanov V A *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **22** (3) 269 (1982)]
- Potapenko I F et al. *Phys. Rev. E* **56** 7159 (1997)
- Potapenko I F, de Azevedo C A *J. Comput. Appl. Math.* **103** 115 (1999)
- Карась В И, Потапенко И Ф *Физика плазмы* **28** 908 (2002) [Karas' V I, Potapenko I F *Plasma Phys. Rep.* **28** 837 (2002)]
- Карась В И, Потапенко И Ф *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* **46** (2) 307 (2006) [Karas' V I, Potapenko I F *Comput. Math. Math. Phys.* **46** (2) 294 (2006)]
- Potapenko I F, Bornatici M, Karas V I *J. Plasma Phys.* **71** 859 (2005)
- Конonenко С И и др. *Физика плазмы* **30** 722 (2004) [Kononenko S I et al. *Plasma Phys. Rep.* **30** 671 (2004)]
- Гуржи Р Н *ЖЭТФ* **35** 965 (1958) [Gurzhi R N *Sov. Phys. JETP* **6** 506 (1958)]
- Ziman J M *Electrons and Phonons* (Oxford: Clarendon Press, 1960) [Займан Дж *Электроны и фононы* (М.: ИЛ, 1962)]
- Баско М М, Соколовский М В, Препринт № 177 (М.: ИТЭФ, 1980)
- Калашников Н П, Ремизович В С, Рязанов М И *Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах* (М.: Атомиздат, 1980) [Kalashnikov N P, Remizovich V S, Ryazanov M I *Collisions of Fast Charged Particles in Solids* (New York: Gordon and Breach, 1985)]
- Ohtsuki Y-H *Charged Beam Interaction with Solids* (New York: Taylor & Francis, 1983) [Оцуки Е-Х *Взаимодействие заряженных частиц с твердыми телами* (М.: Мир, 1985)]
- Карась В И, Моисеев С С, Новиков В Е *Письма в ЖЭТФ* **21** 525 (1975) [Karas' V I, Moiseev S S, Novikov V E *JETP Lett.* **21** 245 (1975)]
- Мойжес Б Я, Пикус Г Е (Ред.) *Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма* (М.: Наука, 1973) [Hansen L K (Ed.) *Thermionic Converters and Low-temperature Plasma* (Oak Ridge, TN: Technical Information Center, U.S. Dept. of Energy, 1978)]
- Асеевская А С, Ивкин Е В, Коломиец Б Г *Письма в ЖТФ* **2** 305 (1976) [Aseevskaya A S, Ivkin E V, Kolomiets B G *Sov. Tech. Phys. Lett.* **2** 117 (1976)]
- Knecht W L *Appl. Phys. Lett.* **6** 99 (1965)
- Knecht W L *Appl. Phys. Lett.* **8** 254 (1966)
- Анисимов С И и др. *Действие излучения большой мощности на металлы* (Под ред. А М Бонч-Бруевича, М А Ельашевича) (М.: Наука, 1970)
- Анисимов С И, Иванов М Ф *ДАН СССР* **225** 280 (1975) [Anisimov S I, Ivanov M F *Sov. Phys. Dokl.* **20** 758 (1975)]
- Парилис Э С, Кишиневский Л М *ФТТ* **3** 1219 (1961) [Parilis E S, Kishinevskii L M *Sov. Phys. Solid State* **3** 885 (1961)]
- Sternglass E J *Phys. Rev.* **108** 1 (1957)
- Kaminsky M *Atomic and Ionic Impact Phenomena on Metal Surfaces* (New York: Academic Press, 1965) [Каминский М *Атомные и ионные столкновения на поверхности металла* (М.: Мир, 1967)]
- Арифов У А *Взаимодействие атомных частиц с поверхностью твердого тела* (М.: Наука, 1968) [Arifov U A *Interaction of Atomic Particles with a Solid Surface* (New York: Consultants Bureau, 1969)]
- Medved D B, Strausser Y E *Adv. Electron. Electron. Phys.* **21** 101 (1965) [Пер. на русск. яз. с сокращ.: Медвед Д, Штрассер Й *УФН* **91** 485 (1967)]
- Frischkorn H J et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.* **214** 123 (1983)
- Петров Н Н, Аброян И А *Диагностика поверхности с помощью ионных пучков* (Л.: Изд-во ЛГУ, 1977)
- Аброян И А, Еремеев М А, Петров Н Н *УФН* **92** 105 (1967) [Abroyan I A, Eremeev M A, Petrov N N *Phys. Usp.* **10** 332 (1967)]

53. Дорожкин А А, Петров Н Н, Петров А А *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **40** 1687 (1976)
54. Mechbach W, Braunstein G, Arista N *J. Phys. B At. Mol. Phys.* **8** L344 (1975)
55. Hasselkamp D, Scharmann A *Surf. Sci.* **119** L388 (1982)
56. Hasselkamp D, Scharmann A *Phys. Lett. A* **96** 259 (1983)
57. Hasselkamp D, Hippler S, Scharmann A *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **2** 475 (1984)
58. Krebs K H *Vacuum* **33** 555 (1983)
59. Hasselkamp D et al. *Nucl. Instrum. Meth.* **180** 349 (1981)
60. Baragiola R A, Alonso E V, Oliva Florio A *Phys. Rev. B* **19** 121 (1979)
61. Alonso E V et al. *Phys. Rev. B* **22** 80 (1980)
62. Hasselkamp D, Scharmann A *Phys. Status Solidi A* **79** K197 (1983)
63. Holmén G, Svensson B, Burén A *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.* **185** 523 (1981)
64. Koyama A, Yagi E, Sakairi H *Jpn. J. Appl. Phys.* **15** 1811 (1976)
65. Koyama A, Shikata T, Sakairi H *Jpn. J. Appl. Phys.* **20** 65 (1981)
66. Миронов Е С, Неменов Л М *ЖЭТФ* **32** 269 (1957) [Mironov E S, Nemenov L M *Sov. Phys. JETP* **5** 188 (1957)]
67. Svensson B, Holmén G *Phys. Rev. B* **25** 3056 (1982)
68. Frischkorn H J et al. *Phys. Rev. Lett.* **49** 1671 (1982)
69. Sternglass E J *Phys. Rev.* **95** 345 (1954)
70. Garnir H P, Dumont P D, Baudinet-Robinet Y *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res.* **202** 187 (1982)
71. Rothard H et al. *Phys. Rev. A* **51** 3066 (1995)
72. Mischler J et al. *Surf. Sci.* **136** 532 (1984)
73. Anno J N *J. Appl. Phys.* **34** 3495 (1963)
74. Koyama A et al. *Jpn. J. Appl. Phys.* **21** 1216 (1982)
75. Svensson B, Holmén G *J. Appl. Phys.* **52** 6928 (1981)
76. Schou J *Phys. Rev. B* **22** 2141 (1980)
77. Батракин Е Н и др. *Поверхность* (12) 82 (1986)
78. Батракин Е Н и др. *ЖЭТФ* **89** 1098 (1985) [Batrakin E N et al. *Sov. Phys. JETP* **62** 633 (1985)]
79. Бабенко В А и др. *ЖТФ* **50** 848 (1980) [Babenko V A et al. *Sov. Phys. Tech. Phys.* **25** 508 (1980)]
80. Готт Ю В *Взаимодействие частиц с веществом в плазменных исследованиях* (М.: Атомиздат, 1978)
81. Агранович В М и др. *ЖЭТФ* **57** 401 (1969) [Agranovich V M et al. *Sov. Phys. JETP* **30** 220 (1970)]
82. Агранович В М и др. *ЖЭТФ* **61** 1511 (1971) [Agranovich V M et al. *Sov. Phys. JETP* **34** 805 (1972)]
83. Даукеев Д К, Лебедев С Я *ФТТ* **12** 655 (1970) [Daukeev D K, Lebedev S Ya *Sov. Phys. Solid State* **12** 507 (1970)]
84. Baragiola R A, Duker C A, Riccardi P *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **182** 73 (2001)
85. Бронштейн И М, Фрайман Б С *Вторичная электронная эмиссия* (М.: Наука, 1969)
86. Siegbahn K (Ed.) *Alpha-Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy* Vol. 1 (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1965) [Зигбан К (Ред.) *Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия* Вып. 1 (М.: Атомиздат, 1969)]
87. Price W J *Nuclear Radiation Detection* (New York: McGraw-Hill, 1958) [Прайс В *Регистрация ядерного излучения* (М.: ИЛ, 1960)]
88. Кононенко С И *Доповіді НАН України* (1) 87 (2001)
89. Соболева Н А, Меламид А Е *Фотоэлектронные приборы* (М.: Высшая школа, 1974)
90. Фоменко В С, Подчерняева И А *Эмиссионные и адсорбционные свойства веществ и материалов* (М.: Атомиздат, 1975)
91. Rosebury F *Handbook of Electron Tube and Vacuum Techniques* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965) [Розбери Ф *Справочник по вакуумной технике и технологии* (М.: Энергия, 1972)]
92. Журенко В П и др. *Физика плазмы* **29** 150 (2003) [Zhurenko V P *Plasma Phys. Rep.* **29** 130 (2003)]
93. Карась В И, Моисеев С С, Препринт ХФТИ АН УССР № 77–24 (Харьков: ХФТИ АН УССР, 1977)
94. Карась В И, Моисеев С С *Укр. физ. журн.* **24** 1724 (1979)
95. Балебанов В М и др. *Физика плазмы* **24** 789 (1998) [Balebanov V M et al. *Atomic Energy* **24** 732 (1998)]
96. Балебанов В М и др. *Атомная энергия* **84** 398 (1998) [Balebanov V M et al. *Atomic Energy* **84** 324 (1998)]
97. Балебанов В М и др., Авт. свид. № 1737559; *Бюлл. изобрет.* (20) (1992)
98. Балебанов В М и др., Патент РФ № 2050626; *Бюлл. изобрет.* (35) (1995)
99. Балебанов В М и др., Патент РФ № 2054742; *Бюлл. изобрет.* (5) (1995)
100. Балебанов В М и др., Патент РФ № 2050625; *Бюлл. изобрет.* (35) (1995)
101. Громов В Е, Целлермайер В Я, Базайкин В И *Электростимулированное волоочение: анализ процесса и микроструктура* (М.: Недра, 1996)
102. Спицын В И, Троицкий О А *Металлофизика* **51** 18 (1974)
103. Косевич А М *Теория кристаллической решетки (физическая механика кристаллов)* (Харьков: Вища школа, Изд-во при Харьк. гос. ун-те, 1988)
104. Безуглый А И, Шкловский В А *ЖЭТФ* **111** 2106 (1997) [Bezuglyi A I, Shklovskii V A *JETP* **84** 1149 (1997)]
105. Карась В И, Потапенко И Ф *Вопр. атом. науки и тех. Сер. Физ. радиац. повреждений и радиац. материаловед.* (4–2) 42 (2009)
106. Захаров В Е, Карась В И *Вопр. атом. науки и тех. Сер. Ядерно-физ. исслед.* (2(66)) 204 (2010)
107. Perrin N, Budd H *Phys. Rev. Lett.* **28** 1701 (1972)
108. Ландау А И, Гофман Ю И *ФТТ* **16** 3427 (1974) [Landau A I, Gofman Yu I *Sov. Phys. Solid State* **16** 2220 (1975)]
109. Zakharov V, Dias F, Pushkarev A *Phys. Rep.* **398** 1 (2004)
110. Zakharov V E (Ed.) *Nonlinear Waves and Weak Turbulence* (American Mathematical Society Translations, Ser. 2, Vol. 182) (Providence, RI: American Mathematical Society, 1998)
111. Musher S L, Rubenchik A M, Zakharov V E *Phys. Rep.* **252** 177 (1995)
112. Zakharov V E, L'vov V S, Falkovich G *Kolmogorov Spectra of Turbulence I. Wave Turbulence* (Berlin: Springer-Verlag, 1992)
113. Zakharov V E, in *Basic Plasma Physics* Vol. 2 (Handbook of Plasma Physics, Vol. 2, Eds A A Galeev, R N Sudan) (Amsterdam: North-Holland, 1984) p. 3; Захаров В Е, в сб. *Основы физики плазмы* Т. 2 (Под ред. А А Галева, Р Судана) (М.: Энергоатомиздат, 1984) с. 48
114. Конторович В М *Радиофизика и радиоастрономия* **11** (1) 5 (2006)

Nonequilibrium Kolmogorov-type particle distributions and their applications

V.E. Zakharov

P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation, L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation
Tel. + 7 (499) 132 67 51. E-mail: zakharov@itp.ac.ru

V.I. Karas'

National Scientific Center "Kharkov Institute of Physics and Technology", National Academy of Sciences of the Ukraine, ul. Akademicheskaya 1, 61108 Kharkov, Ukraine
Tel. + 38 (057) 700 11 46. Fax + 38 (057) 335 35 64. E-mail: karas@kipt.kharkov.ua

The paper reviews the current state of research on nonequilibrium (Kolmogorov-type) steady and unsteady distributions of particles with statically screened Coulomb interaction that are exact solutions of the Boltzmann or Landau collision integral with a source and a sink ensuring the energy flow along the spectrum in momentum space. Analysis is made of the advantages of the new (based on nonequilibrium distributions) process of energy conversion and of the time-dependent nonequilibrium kinetics of electron-phonon system of a crystal in a strong electric field (electroplastic effect).

PACS numbers: **47.11.-j**, **47.27.-i**, **47.27.ek**, **52.25.Dg**

Bibliography — 114 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (1) 55–85 (2013)

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201301c.0055

Received 23 December 2011

Physics – Uspekhi **56** (1) (2013)