УДК 535.317.1

А.С. Сисоєв, Л.А. Назаренко

Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова

ГОЛОГРАФУВАННЯ У ПОЛІ ГАУСОВИХ ХВИЛЬОВИХ ПУЧКІВ

При запису голограмами суттєве значення має часова та просторова когерентність. Тому у якості джерел світла використовуються лазери, випромінювання яких уявляє собою гаусові хвильові пучки. Показано, що опис голографування у хвильових пучках займає усю область між двома граничними випадками голографування у пласких і сферичних хвилях і, отже, є найбільш загальним.

Ключові слова: *голографування, хвильовий пучок, точковий об'єкт, плаский предмет.*

Вступ

У більшості робот з голографії розглядаються голографічний запис та реконструкція зображення для випадків, коли опорна та відновлююча хвилі є пласкими або сферичними хвилями $[1-4]$. При запису голограмами суттєве значення має часова та просторова когерентність. Тому у якості джерел світла використовуються лазери, випромінювання яких уявляє собою гаусові хвильові пучки. В роботі розглядається, як змінюються параметри голографічного зображення, якщо опорна та відновлюючи хвилі уявляють собою гаусові хвильові пучки. У якості об'єктів запису розглянуті найпрості-ші – точковий об'єкт та плаский предмет.

Основна частина

1. Поле опорного та відновлювального пучків у площині голограми

Будьмо вважати, що фотопластинка знаходиться у площині $z=0$. Запис голограми відбувається шляхом реєстрації інтерференції хвиль, які несуть інформацію о предметі, з опорною хвилею, когерентній першій, у якості якої візьмемо гаусовий хвильовий пучок, що поширюються вздовж осі oz_1

$$u_0 = A_0\, exp\left(-\frac{x_1^2+y_1^2}{°_0^2}+ik\,\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_0}+ikz_1\right) \qquad (1)$$

Проекція осі oz_1 на площину xoz складає з віссю oz кут $¯_{0x}$, а проекція на площину yoz з віссю oz - кут $¯_{0y}$.

У якості відновлювальної хвилі візьмемо також гаусовий хвильовий пучок

$$u_B = A_B\, exp\left(-\frac{x_2^2+y_2^2}{°_B^2}+ik\,\frac{x_2^2+y_2^2}{2R_B}+ikz_2\right) \qquad (2)$$

що поширюється вздовж осі oz_2, проекція якої на площини xoz і yoz складає з віссю oz кути $¯_{Bx}$ і $¯_{By}$, відповідно.

Параметри хвильових пучків – радіус плями поля $°_j$ та радіус кривини хвильової поверхні R_j визначаються формулами

$$°_j = °_{oj}\left[1+\frac{z_k^2}{A_{oj}^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$R_j = z_k\left[1+\frac{A_{oj}^2}{z_k^2}\right], \qquad (j=0,B),\ (k=1,2) \qquad (3)$$

де $A_{oj} = ®°_{oj}^2/ª$, $°_{oj}$ - радіус плями поля у горловині пучка, $ª$ - довжина хвилі. Індексу $j=O$ відповідає $k=1$, а індексу $j=B$ відповідає $k=2$.

Переходячи в декартову систему координат, яка пов'язана з голограмою, необхідно зробити перетворення координат, яке при невеличких відхиленнях осей oz_1 і oz_2 від осі oz має вигляд

$$\begin{aligned} x_k &= (x-x_j)+(z-z_j)sin¯_{jx} \\ y_k &= (y-y_j)+(z-z_j)sin¯_{jy} \\ z_k &= (z-z_j)-(x-x_j)sin¯_{jx}-(y-y_j)sin¯_{jy} \end{aligned} \qquad (4)$$

де $sin¯_{jx} = \frac{x_j}{z_j}$, $sin¯_{jy} = \frac{y_j}{z_j}$

Координати (x_0, y_0, z_0) визначають центр плями поля у горловині опорного пучка, координати (x_B, y_B, z_B) – центр горловини відновлювального пучка.

З врахуванням координатних перетворень (4) фаза хвильових пучків в площині голограми має вигляд

$$c_{j}(x,y)=\frac{2®}{a}\frac{1}{2}\left(\frac{x^{2}+y^{2}}{R_{j}}-\frac{2xx_{j}+2yy_{j}}{z_{j}}\right) \quad (5)$$

2. Голографування точкового об'єкту

Точковий об'єкт породжує сферичну хвилю

$$u_{S}=A_{S}\,exp(ikr_{S})$$

де $r_{S}=\left[(x_{S}-x)^{2}+(y_{S}-y)^{2}+(z_{S}-z)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$ - відстань між точкою (x_{S},y_{S},z_{S}), де знаходиться точкове джерело S, і довільною точкою спостереження (x,y,z). Примістимо у площині $z=0$ тонку фотопластинку (див. рис.1)

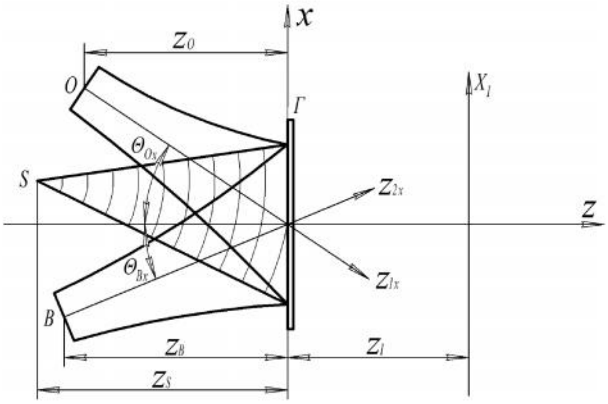

Рис.1 Голографування точкового об'єкту

У параболічному наближенні для точок, які лежать у площині $z=0$, маємо

$$r_{s}=z_{s}+\frac{(x_{s}-x)^{2}}{2z_{s}}+\frac{(y_{s}-y)^{2}}{2z_{s}} \quad (6)$$

Фаза $c_{S}(x,y)$ сферичної хвилі точкового об'єкту S в наближенні (6) у площині голограми має вигляд

$$c_{S}(x,y)=\frac{2®}{a}\frac{1}{2}\left(\frac{x^{2}+y^{2}-2xx_{S}-2yy_{S}}{z_{S}}\right) \quad (7)$$

При реконструкції виникають хвиля нульового порядку дифракції, яка не несе інформації про об'єкт, а також дві хвилі першого порядку дифракції – основна і вторинна – які і формують відновлене зображення (основне і вторинне). Фаза хвилі першого порядку дифракції задовольняє співвідношенню [1]

$$c_{f}=c_{B}\mp c_{O}+c_{S} \quad (8)$$

де верхні знаки беруться для основного зображення, а нижні – для вторинного.

Фаза реконструйованої хвилі $c_{1}(x,y)$ повинна мати вигляд, аналогічний фазі (7) предметної хвилі

$$c_{f}(x,y)=\frac{2®}{a}\frac{1}{2}\left(\frac{x^{2}+y^{2}-2xx_{f}-2yy_{f}}{z_{f}}\right) \quad (9)$$

Підставляючи формули (5), (7), (9) у формулу (8) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях змінних x та y, отримуємо співвідношення для координат голографічного зображення точки

$$\frac{1}{z_{f}}=\frac{1}{R_{B}}\mp\frac{1}{R_{O}}\pm\frac{1}{z_{S}} \quad (10)$$

$$x_{f}=z_{f}\left(\frac{x_{B}}{z_{B}}\mp\frac{x_{0}}{z_{0}}\pm\frac{x_{S}}{z_{S}}\right),$$

$$y_{f}=z_{f}\left(\frac{y_{B}}{z_{B}}\mp\frac{y_{0}}{z_{0}}\pm\frac{y_{S}}{z_{S}}\right) \quad (11)$$

Якщо запис і відновлення точкового об'єкту виконується у полі сферичних хвиль, то поперечні координати x_{1},y_{1} голографічного зображення точки визначаються тими ж формулами (11), а поздовжна координата z_{1} формулою

$$\frac{1}{z_{f}}=\frac{1}{z_{B}}\mp\frac{1}{z_{0}}\pm\frac{1}{z_{S}} \quad (12)$$

Таким чином, якщо у якості опорної і відновлювальної хвиль використовуються гаусові хвильові пучки, то поздовжна координата голографічного зображення точки змінюється порівняно з випадком запису і відновлення у полі сферичних хвиль. Зміна поздовжньої координати z_{1} тягне за собою зміну поперечних координат x_{1},y_{1}.

3. Голографування плаского предмета

Будьмо полагати, що плаский предмет знаходиться у площині, яка відстоїть на відстані z_{s} від фотопластинки, що розташована у площині $z=0$. Ось oz перпендикулярна площині предмета та фотопластинці (див. рис.2).

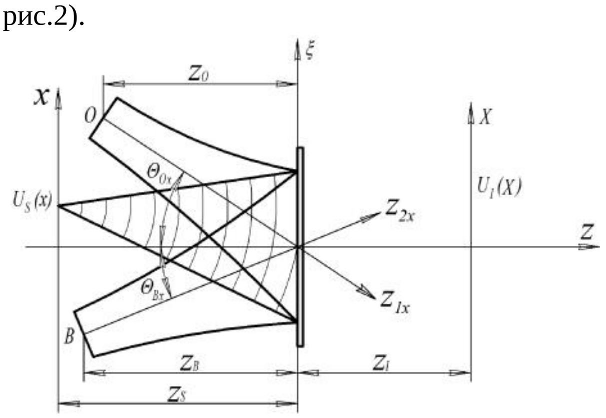

Рис. 2. Голографування плаского предмета

Поперечні координати у площині предмета позначимо (x,y), в площині голограми $(¶,«)$, в площині зображення (X,Y). Предмет освітлюється когерентним світлом і на фотопластинку падає дифракційне поле від предмета. Екран, на якому спостерігається відновлене зображення, розташовано на відстані z_1 від голограми.

Поля опорного та відновлювального хвильових пучків у площині голограми при невеликих відхиленнях осей їх поширення oz_1 і oz_2 від осі oz з врахуванням формули (5) можливо записати у вигляді

$$u_j(¶,«) = A_j\, exp\left[-\frac{¶^2+«^2}{°_j^2} i\frac{k}{2}\left(\frac{¶^2+«^2}{R_j}-\frac{2¶x_j+2«y_j}{z_j}\right)\right]$$

$$(j = 0, B) \qquad (13)$$

У параболічному наближенні амплітуда дифрагованої на голограмі хвилі першого порядку, яка формує основне (або істинне) зображення предмета, визначається формулою

$$u_1(X,Y) = C\, exp\left[-\frac{ik}{2z_f}\left(X^2+Y^2\right)\right]\times$$
$$\iint u_S(x,y)F_1(x)F_2(y)exp\left[-i\frac{k}{2z_S}\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy \qquad (14)$$

де $u_S(x,y)$ - амплітуда вторинних хвиль, що випромінюються розсіючим тілом,

$C = A_0 A_B\, exp\, ik(z_S - z_1)$

$$F_1(x) = \int exp\left[\begin{array}{l}-\left(\frac{1}{°_0}+\frac{1}{°_B}\right)¶^2+\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{z_S}-\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R_B}-\frac{1}{z_f}\right)¶^2-\\ -ik\left(\frac{x}{z_S}-\frac{x_0}{z_0}+\frac{x_B}{z_B}-\frac{x}{z_f}\right)¶\end{array}\right]d¶ \qquad (15$$

$$F_2(y) = \int exp\left[\begin{array}{l}-\left(\frac{1}{°_0}+\frac{1}{°_B}\right)«^2+\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{z_S}-\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R_B}-\frac{1}{z_f}\right)«^2-\\ -ik\left(\frac{y}{z_S}-\frac{y_0}{z_0}+\frac{y_B}{z_B}-\frac{y}{z_f}\right)«\end{array}\right]d« \qquad (16)$$

Інтегрування у формулі (14) здійснюється по всій поверхні плаского предмета, а у формулах (15), (16) - по поверхні голограми. Ці відносно складні формули (14)-(16) визначають амплітуду дифрагованої хвилі, що породжує основне голографічне зображення.

Щоб отримати різке зображення без дифракційних ефектів, необхідно дифракційну картину спостерігати на відстані, при якій зникає квадратичний фазовий член у формулах (15). (16), що виконується за умовою

$$\frac{1}{z_f} = \frac{1}{z_S} - \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_B} \qquad (17)$$

Формула (17) повністю співпадає з формулою (10). При цьому формули (15), (16) суттєво спрощуються. Визначальний внесок в інтеграли (15), (16) вносять навколишності точок $¶ = 0$ та $« = 0$. У результаті отримуємо

$$F_1(x) = ¢\left(\frac{x}{z_S} - \frac{x_0}{z_0} + \frac{x_B}{z_B} - \frac{X}{z_f}\right) \qquad (18)$$

$$F_2(y) = ¢\left(\frac{y}{z_S} - \frac{y_0}{z_0} + \frac{y_B}{z_B} - \frac{Y}{z_f}\right) \qquad (19)$$

де $¢(x)$ - дельта - функція. Підстановка (18), (19) у (15), (16) призводить до кінцевої формули

$$u_f(X,Y) = C_1 u_S\left(\hat{X},\hat{Y}\right) \qquad (20)$$

$$\hat{X} = z_S\left(\frac{x_0}{z_0} - \frac{x_B}{z_B}\right) + \frac{z_S}{z_f}X,$$

$$\hat{Y} = z_S\left(\frac{y_0}{z_0} - \frac{y_B}{z_B}\right) + \frac{z_S}{z_f}Y \qquad (21)$$

$$C_1 = C\, exp\left[-ik\left(\frac{\hat{X}^2+\hat{Y}^2}{2z_S} + \frac{X^2+Y^2}{2z_f}\right)\right] \qquad (22)$$

Як видно з формул (20) – (22), при голографуванні у гаусових пучках плаского предмета основне зображення подібно самому предмету, але має змінений масштаб, що визначається коефіцієнтом z_S / z_1, і зміщено порівняно з голографуванням у сферичних хвилях на величину ax і ay уздовж осей ox і oy, де

$$ax = z_f\left(\frac{x_0}{z_0} - \frac{x_B}{z_B}\right),$$

$$ay = z_f\left(\frac{y_0}{z_0} - \frac{y_B}{z_B}\right) \qquad (23)$$

Масштаб і величина зміщення залежать від параметрів хвильових пучків. Зміна масштабу і зміщення зображення виникають внаслідок того, що змінюється відстань від зображення до голограми (відстань z_1). Якщо виконується умова $R_0 = R_B$, то $z_1 = z_S$, тобто при цьому відстань до зображення дорівнює відстані до предмета. При цьому масштабні зміни зникають.

Якщо виконуються умови

$$\frac{x_0}{z_0} = \frac{x_B}{z_B}, \qquad \frac{y_0}{z_0} = \frac{y_B}{z_B} \qquad (24)$$

то зміщення зображень від осі oz відсутнє. Умови (24) означають, що осі опорного і відновлювального хвильових пучків співпадають.

4. Аналіз результатів

Радіуси кривини хвильових поверхонь опорного та відновлювального хвильових пучків у площині голограми зручно записати у вигляді

$$R_0 = z_0 ±_0 , \qquad R_B = z_B ±_B \qquad (25)$$

де $±_o = 1 + \frac{®^2 °_{o0}^4}{ª^2 z_0^2}$, $±_B = 1 + \frac{®^2 °_{oB}^4}{ª^2 z_B^2}$ (26)

Параметри $±_0$ та $±_B$ визначають відмінності у голографуванні у хвильових пучках від голографування у сферичних і пласких хвилях. Проведемо оцінку цих параметрів. При z_o=1 м, $ª = 6{,}28 \cdot 10^{-7}$ м, $°_{o0} = 0{,}45$ мм параметр $±_0 = 2$, аналогічно $±_B$. Таким чином навіть без використання збільшення розбіжності хвильових пучків параметри $±_0$ і $±_B$ примітно відмінні від одиниці.

Як видно з формул (12) і (17), при голографуванні у полі сферичних хвиль основне зображення знаходиться на відстані, яке дорівнює відстані до об’єкту за умови $z_0 = z_B$. У випадку гаусових пучків поряд з цією рівністю повинно бути виконано ще одне $±_0 = ±_B$, яке можливо переписати у вигляді

$$\frac{°_{o0}^2}{z_0^2} = \frac{°_{oB}^2}{z_B^2} \qquad (27)$$

тобто повинно бути $°_{o0} = °_{oB}$, що означає співпадіння радіусів плям поля опорного і відновлювального пучків у горловинах.

Зміна поздовжньої координати зображення порівняно з поздовжньою координатою предмета описується параметром

$$¥ = \frac{z_S}{z_f} = 1 - z_S \left(\frac{1}{±_B z_B} - \frac{1}{±_0 z_0} \right) \qquad (28)$$

Параметр ¥ одночасно є і масштабним множником при голографуванні плаского предмета. З формули (28) видно, що коли $±_B z_B \le ±_0 z_0$, то масштабний множник ¥ менше одиниці, у противному випадку він більше одиниці і лінійні розміри зображення перевершують лінійні розміри предмета.

У випадку виконання тільки однієї рівності $±_0 = ±_B = ±$, параметр ¥ визначається за формулою

$$¥ = 1 + \frac{a}{±} \qquad (29)$$

де $a = z_S \left(\frac{1}{z_B} - \frac{1}{z_0} \right)$

При $z_0 = z_B$ величина $a = 0$ і масштабний множник $¥ = 1$, тобто масштабні зміни відсутні. Графіки залежностей множника ¥ від параметра ± при різних значеннях параметра a наведено на рис.3.

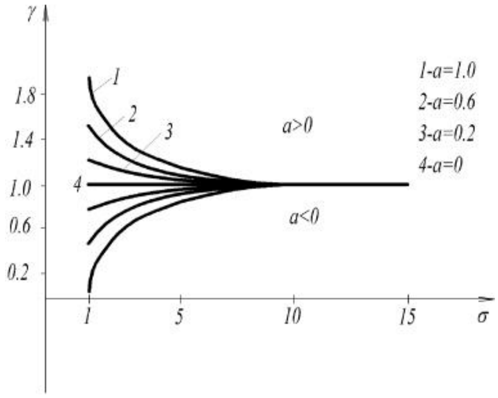

Рис. 3. Залежність ¥ від ±

Випадок $± = 1$ відповідає голографуванню у сферичних хвилях, $± = \infty$ - у пласких хвилях. У цих двох граничних випадках формули (24),(26) переходять у аналогічні роботи $[1]$.

Висновки

Опис голографування у хвильових пучках по параметру ± займає усю область між двома граничними випадками голографування у пласких і сферичних хвилях і, отже, є найбільш загальним.

Література

1. Миллер М. Голография. / М. Миллер // Ленинград: – Машиностроение, 1979. – с.139.

2. Денисюк Ю.Н. Современное состояние и перспективы развития голографии. / Ю.Н. Денисюк // Ленинград: – Наука, 1974. – С. 285.

3. Островский Ю.И. Голография и ее применение. / Ю.И. Островский // Ленинград: – Наука, 1973. – С. 269.

4. Оптическая голография. / под ред. Г. Конфилда; М.: Мир, 1982. –с.374

References

1. Miller M. Holography. / M. Miller // Leningrad:- The Mashin-building, 1979. - P.139.

2. Denisjuk U.N. Modern state and prospects of development of holography. / U.N. Denisjuk // Leningrad: - The Science, 1974. - P. 285.

3. Ostrovski U.I. Holography and her application. / U.I. Ostrovski// Leningrad: - The Science, 1973. - P. 269.

4. Optical holography. / under ed.G. Konfild; M.: The World, 1982. -P.374

Автор: СИСОЄВ Анатолій Сергійович
канд.. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри фізики Харківського національного університету міського господарства ім.. О.М. Бекетова
E-mail: anatolii_sysoev@mail.ru

Автор: НАЗАРЕНКО Леонід Андрійович
доктор технічних наук, професор, зав. кафедри СДС Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова.

ГОЛОГРАФИРОВАНИЕ В ПОЛЕ ГАУССОВИХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

А.С. Сысоев, Л.А. Назаренко

В большинстве работ по голографии рассмотрены голографическая запись и реконструкция изображения для случаев, когда опорная и восстанавливающая волны являются либо сферическими, либо плоскими. В работе рассматривается, как изменяются параметры голографического изображения, если опорные и восстанавливающие волны представляют собой гауссовы волновые пучки. При записи голограммы существенное значение имеют временная и пространственная когерентность. Поэтому в качестве источников света используются лазеры, поле излучения которых представляет собою гауссовы волновые пучки. В качестве объектов записи рассмотрим простейшие объекты – точечный объект и плоский предмет (транспарант).

Показано, что голографирование в гауссовых волновых пучках занимает всю область между двумя предельными случаями голографирования в плоских и сферических волнах и, следовательно, по своему описанию является наиболее общим.

Ключевые слова: *голографирование, волновой пучок, точечный объект, плоский предмет.*

HOLOGRAPHING IN THE GAUSSIAN WAVE BEAMS

A.S. Sysojev, L.A. Nazarenko

In most studies reviewed by holography holographic recording and reconstruction of images in cases where the supporting and restoring the waves are either spherical or flat. Consider how changing the parameters of the holographic image, if the support and reducing waves are Gaussian wave beams. When the hologram recording is essential temporal and spatial coherence. Therefore, lasers are used, where the radiation field represents a Gaussian wave beams as light sources. As a record of objects, consider the simplest objects - a point object and the flat object (transparency).

The paper introduced a generic parameter that characterizes the difference in the description of wave beams in the hologram. When the value is one description in the wave beam passes into the description field of spherical waves, and when the parameter is set to infinity result goes into the description in plane waves.

It is shown that the Gaussian beam holography in the flat primary image object like the object itself, but has a change of scale and offset in comparison with the hologram in spherical waves. The scale and magnitude of the shift depends on the parameters of the wave beam. Changing the scale and offset images are due to the fact that changing the distance from the image to the hologram. Identified conditions under which large-scale changes disappear. This condition means that the axis of the support beams and reducing the same.

In holography in the field of spherical waves the main image is at a distance equal to the distance to the subject, provided that the distance from the centers of the spherical waves to the same hologram. In the case of the Gaussian beam, this requirement is replaced with the equal distances from the centers of the hologram to the centers of the necks of the beams and when it should be performed more radiuses equal spots in the field throats.

Enter a scale factor of holography with a flat object. He gives the change of the longitudinal coordinates of the image relative to the longitudinal coordinates of the object. In case of equal distances from the hologram to the necks of the centers of the support beams and reducing the scale factor is equal to unity, ie, there are no major changes.

It is shown that in the Gaussian wave beam holographing takes all the area between the two extremes in the holographing in plane and spherical waves and, therefore, by their description is most general.

Key words: *holographing, wave beam, point object, flat object.*