

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ О. М. Бекетова**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
до виконання лабораторних робіт  
з курсу

# ***ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА***

**розділ «МЕХАНІКА»**

*(для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання бакалаврів  
за напрямками підготовки 6.050702 «Електромеханіка»,  
6.050701 «Електротехніка та електротехнології»)*

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу «Загальна фізика», розділ «Механіка» (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання бакалаврів за напрямами підготовки 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології») / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: О. М. Петченко. – Х.: ХНУМГ, 2013. – 50 с.

Укладач: О. М. Петченко

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доцент А. В. Безуглий

Рекомендовано на засіданні кафедри фізики,  
протокол № 3 від 29.11.2011 р.

## ЗМІСТ

Стор.

Вступ .....	4
1. Основні положення теорії похибок .....	5
1.1 Обробка випадкових похибок при прямих вимірюваннях .....	5
1.2 Обробка випадкових похибок при непрямих вимірюваннях .....	7
1.3 Графічне зображення результатів вимірювань .....	8
1.4 Послідовність виконання лабораторної роботи та оформлення звіту .....	9
Список джерел .....	10
Зразок звіту .....	11
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1</b>	
Вивчення закону обертового руху твердого тіла за допомогою маятника Обербека .....	12
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2</b>	
Зважування на аналітичних терезах і визначення густини тіл .....	16
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3</b>	
Визначення моменту інерції тіла за періодом крутильних коливань .....	23
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4</b>	
Визначення коефіцієнта відновлення та часу співудару пружних кульок ....	28
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5</b>	
Дослідження моменту інерції тіл різної геометричної форми .....	32
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6</b>	
Визначення прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника .....	38
<b>ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7</b>	
Визначення прискорення сили тяжіння за допомогою математичного маятника .....	44

## ВСТУП

Пропоновані методичні вказівки містять опис лабораторних робіт, які виконують студенти 1 курсу всіх спеціальностей у лабораторії механіки Харківського національного університету міського господарства. У них міститься необхідна інформація щодо підготовки, виконання та звітності про лабораторну роботу: наведено необхідний для виконання лабораторних робіт довідковий матеріал.

Головною метою вказівок є намір не тільки всебічно проілюструвати фізичні явища і закони, але і навчити студента їх спостерігати і перевіряти дослідним шляхом. Вони мають сприяти оволодінню технікою фізичного експерименту, отриманню навичок самостійної дослідницької роботи та виробленню вмінь застосовувати теоретичні знання для аналізу і розв'язання конкретних інженерних задач.

У вказівках представлені різні варіанти вимірювань однієї і тієї ж величини, завдяки чому студент отримує уявлення про розмаїття методів фізичних досліджень.

У кожній лабораторній роботі подається короткий виклад понять, законів, явищ та фізичної основи використаного методу. При цьому передбачається самостійне вивчення підручника, оскільки лабораторна робота може виконуватися студентом ще до прочитання відповідної лекції.

Особлива увага надана безпосереднім вимірюванням та обробці результатів. Щоб правильно оцінити їх надійність і точність, необхідно знати правила користування основними обчислювальними і вимірювальними приладами, основами теорії похибок.

При підготовці до лабораторної роботи студент має вивчити ці методичні вказівки, а також відповідні теоретичні положення, користуючись підручником чи конспектом лекцій. Як основний підручник рекомендований «Курс загальної фізики» І. В. Савельєва.

Методичні вказівки узагальнюють надбання співробітників кафедри фізики ХНУМГ, які протягом багатьох попередніх років робили певний внесок у створення фізичної лабораторії, що відповідає програмі курсу фізики для технічних вузів. Вони написані з урахуванням досвіду методичного забезпечення лабораторного практикуму у вищих навчальних закладах України.

## 1. Основні положення теорії похибок

**Вимірювання** – знаходження значень фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів та її порівняння з іншою однорідною величиною, що прийнята за одиницю вимірювання. Розрізняють два типи вимірювань фізичних величин – **прямі** та **непрямі** (посередні). У разі прямих вимірювань значення фізичної величини знаходять безпосередньо за допомогою приладу. Наприклад, значення температури і тиску знаходять за показами термометра та барометра відповідно. При непрямих вимірюваннях значення фізичної величини знаходять на основі прямих вимірювань інших величин, пов'язаних з шуканою величиною певною функціональною залежністю. Наприклад, прискорення вільного падіння  $g$  тіл, при використанні оборотного фізичного маятника, можна знайти за формулою

$$g = \frac{4\pi^2 l_{np}}{T^2},$$

де період коливань  $T$  і приведена довжина  $l_{np}$  визначають прямими вимірами.

Будь-яке вимірювання супроводжується їх похибками, які бувають: систематичні, випадкові і промахи (грубі помилки).

**Систематичні** похибки зумовлені незмінними факторами, до яких відносяться похибки засобів вимірювань (інструментальні) та похибки використаного методу вимірювань (методичні). Систематичні похибки можна зменшити, якщо застосувати більш досконалі прилади та методи вимірювань.

**Промахи** зумовлені неправильними діями експериментатора або несправністю вимірювальних приладів (інструментів), тому їх виключають із результатів спостережень.

**Випадкові** похибки зумовлені різницею результатів при повторних вимірюваннях. Їх зміни мають статистичний характер і тому можуть бути обраховані методами теорії ймовірностей.

### 1.1 Обробка випадкових похибок при прямих вимірюваннях

Якщо внаслідок повторних вимірювань фізичної величини  $x$  отримали значення  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , то найбільш близьким до істинного значення  $x_{icm}$  є середнє арифметичне значення цієї величини  $\langle x \rangle$ , тобто

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Отже,  $\langle x \rangle = x_{icm}$ .

Знаходячи абсолютні похибки окремих вимірювань,  $|\langle x \rangle - x_1| = \Delta x_1, |\langle x \rangle - x_2| = \Delta x_2, \dots, |\langle x \rangle - x_n| = \Delta x_n$ , можна обрахувати абсолютну похибку результату вимірювань  $\Delta x$  і надати результат вимірювань у вигляді

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x. \quad (2)$$

Відношення абсолютної похибки  $\Delta x$  до істинного значення вимірюваної

величини  $x$  називають відносною похибкою  $\delta x = \frac{\Delta x}{x}$ . Відносна похибка виражається в %, або в частках від цілого. Вона є мірою точності вимірювання, а абсолютна похибка  $\Delta x$  – мірою відхилення середнього значення від істинного значення.

Розглянемо два підходи, які часто використовують для оцінки величини  $\Delta x$  за відомими відхиленнями  $\Delta x_i$ : метод середньої арифметичної абсолютної похибки та метод середньої квадратичної похибки.

У першому методі замість  $\Delta x$  беруть середню арифметичну абсолютну похибку  $\langle \Delta x \rangle$ , яку визначають як суму окремих абсолютних відхилень, поділена на число спостережень  $n$

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_n|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta x_i|. \quad (3)$$

Кінцевий результат записують у вигляді  $x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle$ .

Цей метод обробки результатів є занадто спрощеним, оскільки в ньому не міститься інформації щодо ймовірності знаходження  $x_{icm}$  в інтервалі  $(\langle x \rangle - \langle \Delta x \rangle) < x_{icm} < (\langle x \rangle + \langle \Delta x \rangle)$ . Разом з тим він є поширеним і зручним при обробці даних, що отримані в результаті простих лабораторних вимірювань.

У методі середньої квадратичної похибки також використовують формули (1) і (2), але при цьому, відповідно до закону розподілу (випадкових величин) Стьюдента, вказується ймовірність (надійність)  $P$  того, що істинна величина  $x$  дійсно знаходиться у вищезгаданому інтервалі. Для оцінки величини  $\Delta x$  використовують середню квадратичну (стандартну) похибку  $\sigma$  і коефіцієнт Стьюдента  $\tau(P, n)$ , тобто  $\Delta x = \sigma \tau(P, n)$ . При цьому, величину  $\sigma$  визначають за формулою (4)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}{n(n-1)}}, \quad (4)$$

а значення коефіцієнта Стьюдента  $\tau(P, n)$  знаходять з табл. 1, на перетині рядка, що відповідає кількості спостережень, і стовпця, який відповідає заданій надійності  $P$ .

Таблиця 1.1 Значення коефіцієнтів Стьюдента  $\tau(P, n)$

n	P					
	0.5	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99
2	1.00	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
3	0.82	1.89	2.92	4.30	6.97	9.93
4	0.77	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
5	0.74	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
10	0.70	1.37	1.83	2.26	2.82	3.25

Результат вимірювань записують у такому вигляді:

$$x = \langle x \rangle \pm \sigma \cdot \tau(P, n) \quad (5)$$

Цей метод широко використовують при обробці результатів вимірювань, що отримані як в навчальних, так і наукових лабораторіях. Оцінка абсолютної похибки за формулою (5) застосовна при малому числі спостережень  $n \geq 2$ , як це має місце при виконанні лабораторних робіт.

## 1.2 Обробка випадкових похибок при непрямих вимірюваннях

У даному випадку шукана величина є функцією однієї або декількох змінних. За таких умов, знаючи похибки вимірювань окремих величин, можна визначити похибку і самого результату. Оскільки похибки вимірювань порівняно з вимірюваними величина є досить малі, то їх квадратами можна знехтувати, а відтак, для опрацювання похибок непрямих вимірів можна користуватися диференціальним численням, зокрема, методом логарифмічного диференціювання. Для визначення відносної похибки у випадку непрямих вимірів, у згоді з цим методом необхідно зробити наступне:

- 1) взяти натуральний логарифм від обох частин робочої формули;
- 2) отримане логарифмічне рівняння продиференціювати;
- 3) усі диференціали в отриманому рівнянні замінити на абсолютні похибки  $dx \rightarrow \Delta x$ , а мінуси, що з'явилися після операцій логарифмування та диференціювання, замінити на плюси, тобто  $"- \rightarrow +"$ . Остання операція забезпечує максимальну (граничну) похибку кінцевого результату.

Проілюструємо правила знаходження абсолютної та відносної похибок при непрямих вимірюваннях на прикладі визначення густини  $\rho$  тіла циліндричної форми. У даному випадку робочою формулою є

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 h}, \quad (6)$$

де  $m$  - маса,  $r$  - радіус,  $h$  - висота циліндра.

Для знаходження відносної похибки  $\delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho}$  застосуємо вищезгаданий метод логарифмічного диференціювання. Для цього спочатку прологарифмуємо вираз (6) :

$$\ln \rho = \ln m - \ln \pi - 2 \ln r - \ln h. \quad (7)$$

У подальшому, диференціюючи (7), отримаємо:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - 2 \frac{dr}{r} - \frac{dh}{h}. \quad (8)$$

Замінюючи мінуси, що з'явилися в процесі логарифмування та диференціювання на плюси, а знак диференціала  $d$  на  $\Delta$ , отримаємо кінцевий вираз

$$\delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \pm \left( \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} \right) 100\%. \quad (9)$$

Звідси знаходимо абсолютну похибку:  $\Delta\rho = \delta\rho \cdot \rho. \quad (10)$

У рівняннях (9) і (10)  $\rho, m, r, h$  є середніми значеннями величин, а  $\Delta m, \Delta r, \Delta h$  - абсолютні похибки прямих вимірювань величин, або ж похибки вимірювальних приладів. Запис кінцевого результату подається у вигляді:

$$\rho = (\langle \rho \rangle \pm \Delta \rho). \quad (11)$$

Середній результат і абсолютну похибку округлюють **за правилами:**

- 1) якщо цифра, яку відкидають, більша за 5, то останню цифру, що зберігають, збільшують на одиницю. Наприклад, округлюючи число 21,277 до сотої, слід записати 21,28;
- 2) якщо цифра, що відкидають менша за 5, то останню цифру, що залишається пишуть незмінною. Так, округлюючи число 15,243 до сотої, записують як 15,24;
- 3) якщо цифрою, яку відкидають, є число 5, то округлення проводять так, щоб остання цифра була парною. Наприклад, округлюючи число 19,65, слід писати 19,6, а для числа 21,75 записують 21,8.

Значення фізичних величин, що отримані при лабораторних вимірюваннях, є наближені числа. Математичні дії з такими числами підлягають певним правилам, які є наступними:

при **додаванні й відніманні** в кінцевому результаті залишають стільки десяткових знаків, скільки їх має число з найменшою кількістю значущих цифр: наприклад,  $0,264 + 2,47 + 3,2531 = 5,9871 \approx 5,99$ .

Аналогічно, при **множенні й діленні** в кінцевому результаті залишають стільки ж значущих цифр, скільки їх є в числі з найменшою кількістю значущих цифр:  $3,15 * 0,2352 = 0,74088 \approx 0,74$ .

При **піднесенні до степеня**, або при **добуванні кореня** в кінцевому результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх є в основі або під коренем відповідно:  $3,25^2 \approx 10,56$ .

У випадку **логарифмування** в мантисі наближеного числа залишають стільки значущих цифр, скільки їх є в числі, що логарифмується, тобто  $\ln 3,51 \approx 1,25$ .

### 1.3 Графічне зображення результатів вимірювань

Метод графічного подання даних корисно застосовувати тоді, коли є необхідність наочно продемонструвати хід залежності  $y(x)$ , або ж коли є потреба графічно визначати величину  $y$  при тих значеннях  $x$ , які безпосередньо в дослідах не вимірювались. Приклад побудови графіка наведений на рис.1.3.

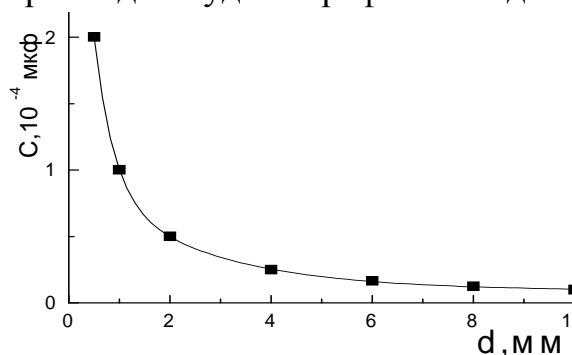


Рис. 1.3



Зазвичай графік будують на міліметровому папері. Для незалежної змінної, як правило, вибирають вісь абсцис. На кінцях осі вказують відкладувану фізичну величину та її розмірність. Потім на осі наносять масштабні поділкі, так щоб відстань між поділками складала 1:2,5 одиниці або ці цифри, помножені на  $10^{\pm n}$  (n-ціле число). Порядок масштабу, тобто  $10^{\pm n}$ , виносять на кінець шкали. Точка перетину осей не обов'язково має відповідати нулю по одній або обох осях. Початок відліку на осях та масштаби вибирають так, щоб експериментальна крива зайняла увесь аркуш; похибка відповідала б кільком дрібним поділкам графіка.

Після вибору системи координат на міліметрівку наносять експериментальні точки. Їх позначають кружками, квадратами і т.п. Далі будують власне графік, тобто проводять плавну криву якомога ближче до нанесених точок. Деякі точки можуть опинитися поза кривою. Необхідно прагнути до того, щоб по обидва боки від графіка була приблизно однакова кількість точок. Якщо окремі точки значно відхиляються від кривої, то це може свідчити про наявність промахів. Щоб з'ясувати причину таких відхилень, досліди для цих значень слід повторити. Розміри аркуша з графіком мають бути не менше половини сторінки лабораторного журналу.

Побудований графік слід вклеїти в лабораторний журнал. Як приклад правильної побудови графіка на рис.1.3 наведений графік залежності ємності плоского конденсатора від відстані між пластинами.

#### **1.4 Послідовність виконання лабораторної роботи та оформлення звіту**

Перш ніж приступити до виконання лабораторної роботи, необхідно ретельно ознайомитися з методичними вказівками до неї. При вивченні їх змісту слід звернути увагу на формулювання фізичних явищ і законів, які вивчаються в даній роботі. Після проробки відповідних вказівок треба встановити мету і методику експерименту, скласти короткий конспект лабораторної роботи, в якому повинні бути заготовлені таблиці для внесення даних вимірювань, а також розрахункові формули. Далі необхідно отримати допуск у викладача на виконання роботи. Під час виконання роботи важливо навчитись керувати експериментом, тобто вміти створювати в установці досліджуване фізичне явище і припиняти його при необхідності. Усі записи занести до лабораторного журналу. Для чернеток, допоміжних записів та розрахунків відвести окремі сторінки. Оформлення кожної роботи починати з нової сторінки, вказуючи дату заповнення.

Результати вимірів, а також розраховані величини записують в заздалегідь підготовлені таблиці. Виконану роботу обов'язково треба показати викладачу, який її перевіряє і ставить підпис про виконання. Після опрацювання дослідних даних слід написати звіт, який повинен містити в собі: мету роботи, прилади та матеріали, розрахункові формули для вимірюваних величин та їх похибок, а також заповнені таблиці, рисунки і кінцевий результат у вигляді:

$$X = \langle X \rangle \pm \Delta X,$$

де  $\langle X \rangle$ ,  $\Delta X$  - середнє значення та абсолютна похибка вимірюваної величини.

При оформленні звіту слід дотримуватися такого формату: на титульному аркуші зверху вказати назви міністерства, навчального закладу, кафедри, лабораторії, в його центрі – назву лабораторної роботи, її номер. Внизу аркуша вказати шифр групи студента і його прізвище, дату виконання роботи, а також посаду і прізвище викладача. На останньому рядку пишуть місто, рік.

Для вивчення основ теорії похибок рекомендовані наступні джерела:

### Список джерел

1. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений. –М.: Наука, 1968.- 97 с.
2. Кучеренко І. М., Дущенко В. П., Андріанов В. М. Обробка результатів фізичних вимірювань.-К.: Вища школа, 1981.- 216 с.
3. Загальна фізика. Лабораторний практикум. За ред. І. Т.Горбачука. - К.: Вища школа. - 1992.- 512 с.
4. Физический практикум / Под ред. проф. В. И. Ивероновой. –М.: Госиздат физ.-мат. литературы, 1962. - 956 с.
5. ДСТУ-2681-94. Метрологія. Терміни і визначення.
6. Тейлор Дж. Теория ошибок. - М.: Мир, 1985. - 272 с.
7. Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов измерений. –М.: Наука, 1970.- 104 с.
8. Савельев И. В. Курс общей физики, Т.1, - М., 1989.- 513 с.
9. Лабораторный практикум по физике. Ч.1. Под ред. Базакуцы В. А. Харьков, 1969.- 243 с.
- 10.Лабораторный практикум по физике / Под ред. А. С. Ахматова.- М.: ВШ, 1980.- 267 с.

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова**

**Кафедра фізики**

**Звіт**

виконаної лабораторної роботи № 7

“Визначення прискорення сили тяжіння за допомогою математичного маятника”

	Дата виконання	Дата захисту	Виконавець	Викладач
План			Студ.1СТ-1	Проф. ПІБ
Факт			ПІБ	Підпис

## Лабораторна робота № 1

### ВИВЧЕННЯ ЗАКОНУ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА ЗА ДОПОМОГОЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

**Мета роботи:** вивчити обертальний рух маятника; визначити момент інерції хрестовини та момент сил тертя.

#### 1. Обладнання:

- 1.1. Маятник Обербека.
- 1.2. Штангенциркуль.
- 1.3. Секундомір.
- 1.4. Масштабна лінійка.
- 1.5. Вантажі.

#### 2. Загальні положення

Одним із параметрів, що характеризує обертальний рух твердого тіла, є кутове прискорення  $\beta$ :

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.1)$$

Воно виникає внаслідок дії на кожний елемент  $m_i$  маси тіла тангенціальної сили  $F_i$ :

$$F_i = m_i a_i = m_i \beta_i r_i. \quad (2.2)$$

Момент цієї сили  $M$  відносно нерухомої осі  $A-A$  є:

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \vec{F}_i] = m_i r_i^2 \vec{\beta}_i. \quad (2.3)$$

Повний момент сили, що діє на все тіло:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n M_i = \vec{\beta} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (2.4)$$

Скалярна величина:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (2.5)$$

є моментом інерції тіла відносно осі  $A-A$ . З формули (2.5) видно, що момент інерції твердого тіла дорівнює сумі добутків елементарних мас на квадрат їх відстаней до розглядуваної осі. Вираз (2.5) буде тим точніше, чим меншими будуть  $\Delta m$  і  $\Delta v$ , тобто сума (2.5) зводиться до інтегралу  $I = \int_V r^2 \rho dv$ , де  $r$  – від-

стань від елемента об'єму  $dv$  до осі обертання,  $\rho$  - густина тіла, а інтеграл бе-

реться по всьому об'єму тіла. Зауважимо, що інтегрування можна здійснити і по масі, якщо замінити під інтегралом  $rdv = dm$ . Можна бачити, що величина моменту інерції залежить від маси тіла, його розмірів та вибору осі обертання. Це величина скалярна. Вона відіграє при обертальному русі ту ж роль, що і маса при поступальному русі, тобто є мірою інертності твердого тіла при його обертанні. Момент інерції – величина адитивна і це означає, що момент інерції складеного тіла дорівнює сумі моментів інерції окремих його частин.

На основі виразів (2.4) і (2.5) виводиться основне рівняння динаміки обертального руху:

$$\vec{M} = J \vec{\epsilon}, \quad (2.6)$$

де  $M$ -результуючий момент сил. Після проектування на вісь обертання одержимо  $M = I\beta$ , де  $M$  – проекція результуючого моменту (алгебраїчної суми моментів) на вісь обертання.

### 3. Опис установки та виведення розрахункових формул

Прилад (маятник Обербека), за допомогою якого проводяться дослідження параметрів обертального руху твердих тіл, схематично зображений на рис.3.1.

Основною його частиною є хрестовина, що складається із шківів 1 і закріплених чотирьох взаємно перпендикулярних стержнів 2. На шків намотують нитку з вантажем 3 масою  $m_3$ , а на кожному із стержнів 2 розмішують однакові за величиною додаткові тягарці 4 масою  $m_0$  циліндричної форми. Останні можна легко пересувати вздовж стержня і закріплювати в необхідному положенні гвинтом.

Якщо нитці надати можливість розмотуватись під дією вантажу 3, то рухома частина маятника, зокрема хрестовина, почне обертатися з прискоренням

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{J}. \quad (3.1)$$

Величина  $\vec{M}$  являє собою векторну суму моментів сил натягу нитки  $\vec{M}_n$  і сил тертя  $\vec{M}_{тр}$ , що прикладені до маятника, тобто:

$$\vec{M} = \vec{M}_n + \vec{M}_{тр} \quad (3.2)$$

Підставивши вираз (3.2) в (3.1) і спроектувавши на вісь  $A-A$ , дістанемо скалярне рівняння:

$$M_n - M_{тр} = J\beta, \quad (3.3),$$

яке називають основним рівнянням динаміки обертального руху тіл, або ж другим законом Ньютона для обертального руху. Воно встановлює простий зв'язок між основними фізичними характеристиками, що описують обертальний рух.

Із формули (3.3) можна бачити, що коли  $M_n$  і  $\beta$  визначені, то, побудувавши графік функції  $M_n = f(\beta)$ , з нахилу кривої можна знайти момент інерції маятника  $J$ , а за відрізком, що відтинається на осі  $M_n$ , визначити  $M_{тр}$ .

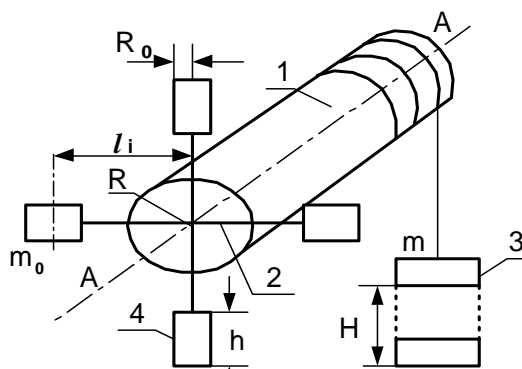


Рис. 3.1

Величину  $M_n$  обраховують за формулою:

$$M_n = m(g - a)R, \quad (3.4)$$

де  $R$  - радіус шківa.

Прискорення  $a$  вантажу маси  $m$  зручно обчислити за формулою шляху для рівноприскореного руху:

$$a = \frac{2H}{t^2}, \quad (3.5)$$

де  $H$  і  $t$  - висота і час падіння відповідно.

Кутове прискорення визначають за формулою:

$$\beta = \frac{a}{R}. \quad (3.6)$$

Повний момент інерції  $J$  маятника відносно осі обертання  $A-A$  (як величини адитивної) складається з моменту інерції хрестовини  $J_{xp}$  і моменту інерції тягарців  $J_m$  відносно тієї ж осі:

$$J = J_{xp} + J_m. \quad (3.7)$$

Величину  $J_m$  для чотирьох циліндричних тягарців 4 (рис.3.1), що знаходяться на відстані  $l_i$  від осі  $A-A$ , розраховують за теоремою Штейнера

$$J_m = 4(J_0 + m_0 l_i^2). \quad (3.8)$$

де  $J_0$  - момент інерції циліндра відносно осі, що проходить через середину циліндра, перпендикулярно до його твірної. Для повного кругового циліндра висотою  $h$ , що має внутрішній  $r_0$  і зовнішній  $R_0$  радіуси та масу  $m_0$ , можна записати

$$J_0 = \frac{m}{12} (3R_0^2 + 3r_0^2 + h_0^2). \quad (3.9)$$

Підставивши (3.9) в (3.8), дістанемо:

$$J_m = 4 \left( \frac{m_0}{12} (3R_0^2 + 3r_0^2 + h_0^2) + m_0 l_i^2 \right), \quad (3.10)$$

де  $m_0 = 0,25\text{кг}$ ;  $r_0 = 5 \cdot 10^{-3}\text{м}$ .

#### 4. Порядок виконання роботи

4.1 Виміряти радіус шківів  $R$  у тому місці, де намотується нитка, і висоту падіння  $H$  вантажу  $m$  (висоту  $H$  для всіх дослідів залишити незмінною).

4.2 Закріпити тягарці 4 масою  $m_0$  на однаковій від осі А-А відстані  $l_i$  (відстань  $l_i$  задає викладач).

4.3 Визначити радіус  $R_0$  і висоту  $h_0$  додаткових тягарців 4.

4.4 До кінця нитки підвішувати по черзі тіла  $m$  відомої маси і, користуючись секундоміром, визначити час  $t$  їх падіння з висоти  $H$ .

4.5 Користуючись експериментальними даними, визначте наступні фізичні характеристики:

а) прискорення вантажів  $a$  за формулою (3.5);

б) кутове прискорення  $\beta$  за формулою (3.6);

в) моменти сил натягу  $M_n$  за формулою (3.4).

Таблиця 4.1

№ Дослід лїду	$m_i$	$t$	$t_{cp}$	$a$	$\beta$	$M$	$l_i$	$R$	$R_0$	$H$	$h_0$	$J_m$	$J$	$J_{xp}$	$M_{np}$
	кг	с	с	м/с <sup>2</sup>	рад/с <sup>2</sup>	Нм	м	м	м	м	м	кг·м <sup>2</sup>	кг·м <sup>2</sup>	кг·м <sup>2</sup>	Нм
1															
2															
3															
4															
5															
6															

4.6. Всі виміряні й обчислені експериментальні результати необхідно занести до табл.4.1

4.7. За одержаними значеннями  $\beta$  і відповідними кожному із них  $M_n$ , треба побудувати графік  $M_n = f(\beta)$  так, як це зображено на рис.4.1.

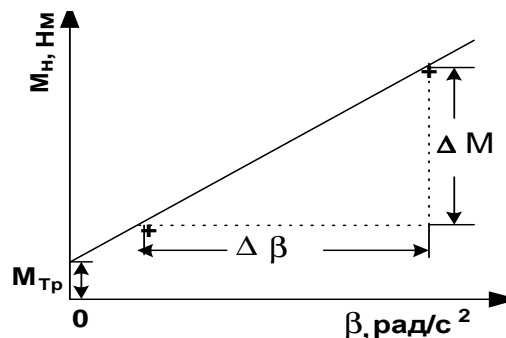


Рис. 4.1

**4.8.** Із графіка (рис.4.1) визначте момент інерції маятника:

$$J = \frac{\Delta M_n}{\Delta \beta}, \text{ а також величину } M_{mp}.$$

**4.9.** Користуючись формулою (3.10), визначте момент інерції  $J_m$  додаткових тягарців 4.

**4.10.** Застосовуючи (3.7) і знайдені вище значення  $J_m$  і  $J$ , обчисліть момент інерції хрестовини  $J_{xp}$ .

## 5. Контрольні запитання і завдання

1. Назвіть величини, які вимірюють у дослідах, і ті, що визначають за розрахунковими формулами.
2. Напишіть основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.
3. Напишіть закон руху вантажу  $m$ .
4. Що називають моментом інерції твердого тіла відносно осі обертання?
5. У чому полягає властивість адитивності?
6. Дайте визначення моменту сили відносно точки (осі).
7. Як визначають напрям вектора моменту сили?
8. Що називають парою сил?
9. Сформулюйте теорему Штейнера.

## Лабораторна робота № 2

### ЗВАЖУВАННЯ НА АНАЛІТИЧНИХ ТЕРЕЗАХ І ВИЗНАЧЕННЯ ГУСТИНИ ТІЛ

**Мета роботи:** вивчення будови важільних аналітичних терезів; оволодіння методикою точного зважування і визначення густини тіл правильної геометричної форми.

#### 1. Прилади і матеріали:

- 1.1 Важільні аналітичні терези.
- 1.2 Тіла правильної геометричної форми.
- 1.3 Штангенциркуль.
- 1.4 Мікрометр.

#### 2. Загальні положення

Для точного зважування тіл у лабораторній практиці використовують терези – важільні або пружинні. Серед важільних терезів розрізняють: технічні, аналітичні та терези найвищої точності – метрологічні.

У даній роботі використовують важільні аналітичні рівноплечі терези типу ВЛА- 100г –М, схематично представлені на рис. 2.1.



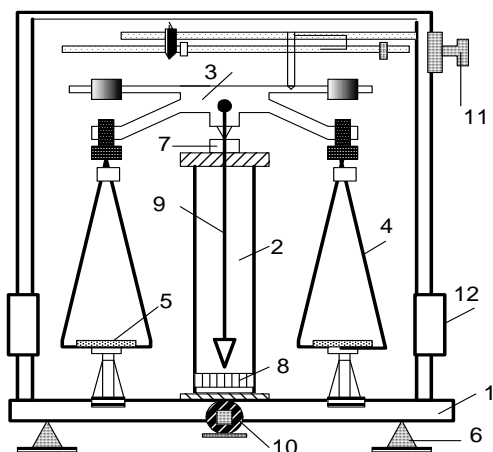


Рис. 2.1.

Зважування на аналітичних терезах ґрунтується на використанні диференціального методу вимірювань, суть якого полягає в тому, що основну частину навантаження врівноважують гирями, а малу різницю між вагою зважуваного тіла і гир визначають за відхиленню коромисла від положення рівноваги за допомогою відлікової шкали (вейтографа).

Терези, що схематично наведені на рис. 2.1, складаються з підставки 1, колонки 2, коромисла 3, двох серег 4 та двох шальок 5. Підставка 1 спирається на ніжки 6, що мають гвинти для юстування приладу. На підставці розміщена колонка терезів, зверху якої встановлена плоска подушка з твердого матеріалу. Коромисло коливається на подушці навколо ребра своєї опорної призми 7. На рівних відстанях від опорного ребра розміщені призми, на яких підвішені шальки терезів. Положення рівноваги відмічається на шкалі 8 вейтографа. На окулярі вейтографа, відносно якого рухається стрілка 9 з оптичною шкалою, є візирна лінія. Кінець стрілки з оптичною шкалою розташовується перед мікροоб'єктивом оптичної системи, до якої також входить освітлювач, конденсор і оптичний пристрій. Для зручності установки нуля, окуляр може переміщуватись відносно шкали 8, виражену у міліграмах, у межах  $\pm 1,5$  мг. Це дозволяє відмічати візирною міткою нульове положення ненавантажених терезів в умовах їх рівноваги. В електричне коло освітлювальної лампи включений мікроперемикач, який включає лампу тільки при введенні терезів у робочий стан.

Для зупинки коливань терезів та звільнення призми від навантаження служить аретир 10. При повороті ручки важеля аретира в той чи інший бік коромисло закріплюється на спеціальних підпорах, або знімається з них. З метою зменшення часу руху коромисла терези обладнані заспокоювачем-демпфером. Внаслідок дії цього пристрою стрілка 9 практично без коливань повільно приходить до стану рівноваги, який відмічають потім візиром. Вимірювальну шкалу вейтографа - підсвічує електролампа, яку вмикають поворотом ручки аретира.

Для здійснення навантаження, що менше за 1г, використовують спеціальний механізм 11, який забезпечує установа на одне плече коромисла вбудованих каліброваних важків (рейтерів) у вигляді кілець із металевого дроту

певної маси. Масу кілець можна варіювати в межах від 0 до 990 мг з кроком 10 мг за допомогою двох градуйованих лімбів механізму 11.

При обертанні малого лімба механізму 11 відбувається навішування або зняття десятків міліграм, а при обертанні його великого лімба – сотень міліграм. Обертання лімбів здійснюють незалежно один від одного. Вмикання та вимикання терезів здійснюють за допомогою аретира 10. Найбільша вимірювана маса на терезах становить 200 г.

Кожні терези характеризують величиною чутливості й точності. Чутливість терезів характеризується відношенням лінійного (або кутового) переміщення покажчика рівноваги (стрілки) при вміщенні на шальку терезів тіла певної ваги, що викликає це переміщення. Чутливість виражають в поділках шкали, віднесеної до одного міліграма. Зазначимо, що чутливість терезів залежить від навантаження та конструктивних особливостей деталей терезів (довжини плеча коромисла і його ваги, кута між плечем коромисла та горизонталлю тощо.) Під точністю терезів розуміють розбіжність результатів, що має місце при повторних зважуваннях тіла. Точність використовуваних важільних аналітичних терезів становить 0,1 мг.

### **2.1 Правила поводження з терезами наступні:**

1) перед початком зважування терези встановлюють за виском і перевіряють правильність їх роботи. Тобто, слідкують за тим, щоб стрілка ненавантажених терезів однаково відхилялась вліво і вправо.

2) доки терези не аретовані, не можна класти на шальки чи знімати з них тягарці (гирі). Гирі – це еталонні тіла певної маси;

3) тягарці накладають на шальки так, щоб їх спільний центр ваги приходився по можливості на середину шальки. Зважуване тіло має бути сухим та чистим;

4) всі маніпуляції з тягарцями виконують за допомогою пінцета; не можна звільняти повністю коромисло, якщо шальки мало врівноважені, його звільнюють на стільки, щоб можна було судити по відхиленню стрілки, яка з шальок легша.

Після цього терези відразу ж аретирують. З наближенням до стану рівноваги стрілка коромисла 9, після звільнення коромисла, відхиляється і починає повільно наближатися до певної позначки на шкалі вейтографа;

5) аретирувати і звільняти коромисло потрібно завжди повільно і обережно. Аретир слід приводити в дію, коли стрілка проходить через положення рівноваги. При зважуванні тіла дверцята вітрини 12 мають бути закриті;

6) не можна залишати тягарці на шальках, особливо коли терези не аретовані;

7) після зважування терези аретують, а дверцята 12 закривають;

8) при зважуванні гирі кладуть, починаючи з найбільшої і поступово доходячи до 1 г.

### **2.2 Зважування тіл**

Щоб зважити досліджуване тіло на аналітичних терезах, необхідно виконати наступне: встановити нульову точку терезів; зважити тіло; визначити поправки на недовантаження та на вплив повітря.

Зупинимося більш детально на виконанні цих процедур (рис.2.2).

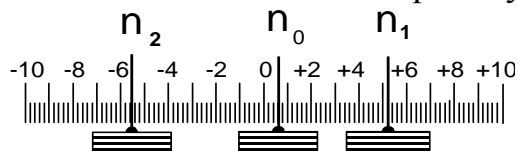


Рис. 2.2

1. Перед зважуванням тіла необхідно встановити нульове положення стрілки ненавантажених терезів. Щоб виключити вплив тертя, нульову точку визначають за методом коливань. Для цього фіксують декілька крайніх положень стрілки і знаходять їх середнє арифметичне. Оскільки амплітуда коливань зменшується не пропорційно часу, а за експоненціальним законом, то кількість коливань беруть непарним, наприклад, п'ять:  $n_1, n_3, n_5$  – зліва і  $n_2, n_4$  – справа. Після цього знаходять нульову точку  $n_0$ , тобто

$$n_0 = \frac{\frac{n_1 + n_3 + n_5}{3} + \frac{n_2 + n_4}{2}}{2} \quad (2.1)$$

Спостереження нульової точки повторюють ще двічі і знаходять її середнє значення.

2. Щоб зважити тіло, його кладуть на ліву шальку терезів, а на праву – гирі і знаходять масу тіла з недостачею до 1 г. У подальшому, користуючись навантажувальним пристроєм 11, знаходять точку рівноваги навантажених терезів  $n_1$ . Якщо точка  $n_1$  збігається з точкою  $n_0$  ненавантажених терезів, то вага досліджуваного тіла  $m$  дорівнює вазі важків  $M$ . Зазвичай, зазначені точки не збігаються між собою, тобто  $n_1 \neq n_0$ . Нехай точка  $n_1$  лежить справа від точки  $n_0$ . Це буде означати, що  $m > M$ , тобто вага  $m$  тіла більша за вагу гир  $M$ , або

$$m = M + \Delta M, \quad (2.2)$$

де  $\Delta M$  - поправка на недовантаження. Згадану поправку  $\Delta M$  знаходять методом інтерполяції. Дійсно, якщо маса гир при положенні рівноваги  $n_1$  рівна  $M$ , то для повернення стрілки терезів в нульову точку  $n_0$  необхідно збільшити вагу гир на  $\Delta M$  мг. Припускаючи, що при малих кутах відхилення стрілки від положення рівноваги є пропорційним навантаженню, можна додати на праву шальку терезів 10 мг, потім визначити нульову точку стрілки при перевантаженні  $n_2$  і шляхом інтерполяції знайти добавку

$$\Delta M = \frac{(n_1 - n_0)10}{n_1 - n_2} \text{ мг} \quad (2.3)$$

З урахуванням вказаної добавки (2.3) можна більш точніше визначити вагу досліджуваного тіла  $m$ , користуючись формулою (2.2). Разом з тим визначена в такий спосіб вага тіла відрізняється від істинної ваги, через те, що зважування здійснювалось у повітрі де воно втрачає у вазі, що дорівнює вазі виштовхнутого ним повітря. У даній роботі поправкою на втрату ваги знехтували, оскільки об'єми тіла і важків приблизно однакові, а відтак і виштовхувальні сили рівні.

Слід зауважити, що зважування, як і будь-яке вимірювання не може бути

абсолютно точним. Найбільш поширеними при цьому є систематичні похибки, зумовлені:

- 1.) недостатнім юстуванням терезів;
- 2.) нестабільністю температурного режиму;
- 3.) нерівністю плечей терезів.

Перші дві похибки можна усунути шляхом створення необхідних умов для проведення вимірювань. Для усунення впливу нерівноплечності коромисла використовують особливі методи точного зважування, зокрема: тарування – метод Борда, сталого навантаження – метод Менделєєва, подвійного зважування – метод Гауса.

У методі тарування досліджуване тіло після врівноважування тарним вантажем (пісок, дріб тощо) знімається з шальки терезів, а на його місце кладуть гирі так, щоб привести терези в стан початкової рівноваги. При цьому маса тіла і гир є рівними. У цьому методі зважування нерівність плеч коромисла не відіграє ролі, оскільки тіло і гирі лежать на одній і тій шальці терезів.

Сутність методу сталого навантаження полягає в тому, що на одну шальку терезів (ліву) вміщують гирю, а на іншу – дрібні важки, вага яких у сумі дорівнює вазі гирі. Після цього вміщують на праву шальку тіло, але знімають з неї важки до врівноваження терезів. Як видно, вага тіла буде дорівнювати вазі знятих важків і навантаження на коромисло при зважуванні є незмінним. Отже зважуванні тіла здійснюють при незмінній чутливості терезів.

У методі Гауса (метод подвійного зважування, який використовують в даній роботі), тіло зважують два рази – один раз на лівій шальці, другий - на правій. Унаслідок нерівності довжин плеч коромисла результати зважування тіла на різних шальках дещо відрізняються між собою. Тому масу тіла визначають у такий спосіб. Нехай  $L_1$  є довжина лівого, а  $L_2$  – довжина правого плеча коромисла,  $m_1$  – маса важків, що містяться на лівій шальці терезів і врівноважують тіло, що розташоване на лівій шальці,  $m_2$  - маса тих самих важків, коли вони лежать, навпаки- на правій шальці, а зважуване тіло, - на лівій;  $m$  - маса зважуваного тіла. Умовами рівноваги в цих двох випадках будуть:  $mL_2 = m_1L_1$ ,  $mL_1 = m_2L_2$ .

Звідси маємо  $m = \sqrt{m_1 m_2}$ .

Враховуючи те, що різниця між масами  $m_1$  і  $m_2$  мала, можна записати  $m_1 = m_2 + \Delta m$ . Після цього отримаємо:

$$m = \sqrt{m_2(m_2 + \Delta m)} = m_2 \left( 1 + \frac{\Delta m}{m_2} \right)^{0.5},$$

або у вигляді біноміального ряду:

$$m = m_2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\Delta m}{m_2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\Delta m}{m_2} \right)^2 + \dots \right].$$

Враховуючи те, що  $\frac{\Delta m}{m_2}$  у порівнянні з одиницею мале, то нехтуючи квадратом цієї величини, отримаємо

$$m = m_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{m_2} \right). \text{ Підставивши } \Delta m = m_1 - m_2,$$

знайдемо остаточний вираз для маси зважуваного тіла, тобто

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2}. \quad (2.4)$$

### 2.3 Визначення густини тіл правильної геометричної форми

Густиною речовини називають фізичну величину, яка чисельно дорівнює масі речовини в одиниці об'єму.

Якщо маса неоднорідного тіла є  $m$ , а його об'єм  $V$ , то середню густину визначають за формулою:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.5)$$

Як бачимо, для визначення середньої густини потрібно визначити об'єм і масу тіла.

Для деяких тіл правильної геометричної форми об'єм обчислюють за формулами :

$$1) \text{ об'єм зрізаного конуса - } V = (1/3) \pi (R^2 + r^2 + Rr) H \quad (2.6)$$

$$2) \text{ об'єм колового конуса - } V = (1/3) \pi R^2 H \quad (2.7)$$

$$3) \text{ суцільного циліндра - } V = \pi R^2 H \quad (2.8)$$

$$4) \text{ порожнистого циліндра - } V = \pi (R^2 - r^2) H \quad (2.9)$$

$$5) \text{ кулі - } V = (4/3) \pi R^3, \quad (2.10)$$

де  $H$  – висота,  $R$  і  $r$  - радіуси тіл.

### 3. Порядок виконання роботи

**3.1** Зважити дане викладачем тіло. Для цього покласти тіло на ліву шальку терезів, а на праву - важки. Для врівноважування шальок терезів використовувати спеціальний пристрій, який навішує тягарі на коромисло.

**3.2** Встановити рівновагу, записати масу тіла (маса гир плюс відлік за лімбом навантажувального пристрою, плюс відлік за шкалою вейтографа).

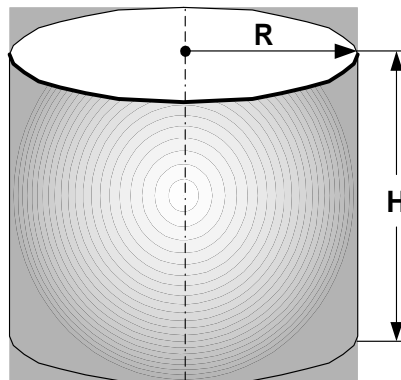


Рис. 3.1

**3.3** Визначити геометричні розміри тіла, користуючись відповідними формулами (2.6) - (2.10), обчислити його об'єм  $V$ , форму тіла зарисувати і вказати розміри (рис.3.1).

**3.4** За формулою (2.5) обчислити густину матеріалу  $\rho$ .

**3.5** Зробити обчислення відносної  $\Delta\rho/\rho$  та абсолютної  $\Delta\rho$  похибок.

Зокрема, для суцільного циліндра, що наведений на (рис.3.1), маємо згідно з формулою (2.8)

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} \right) 100\%, \quad (3.1)$$

$$\Delta\rho = \rho \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} \right). \quad (3.2)$$

Одержані результати занести до табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Матеріал	$m$	$\Delta m$	$R$	$H$	$V$	$\rho$	$\Delta\rho$	$\Delta\rho/\rho$	$\Delta R, \Delta H$
	кг	кг	м	м	м <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>	%	м

#### 4. Контрольні запитання

1. Що називають вагою тіл?
2. Від чого залежить вага тіла?
3. Будова і принцип дії важільних і пружинних терезів.
4. Записати умови рівноваги важільних терезів.
5. Що називають чутливістю терезів?
6. Як визначають середню і локальну густину речовини?
7. Чи буде змінюватися вага тіла, якщо воно рухається з прискоренням вертикально вниз (вгору), або знаходиться у спокої?
8. Причини виникнення невагомості тіл.

## Лабораторна робота № 3

### ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ ТІЛА ЗА ПЕРІОДОМ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

**Мета роботи:** Визначити момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через його центр.

#### 1. Прилади і матеріали:

- 1.1. Крутильний маятник.
- 1.2. Додаткові тіла (циліндри, кулі тощо).
- 1.3. Штангенциркуль.
- 1.4. Лінійка.
- 1.5. Секундомір.

#### 2. Загальні положення

Крутильні коливання можна легко спостерігати за допомогою експериментальної установки, схематично представленої на рис.4.1.

Це установка, що включає в себе сталевий дріт  $a$ , що закріплений зверху на штативі. До нижнього кінця дроту жорстко прикріплений масивний стрижень  $AB$ , момент інерції якого визначається.

Якщо за допомогою зовнішнього моменту сил  $\vec{M}$  стрижень повернути на певний кут  $\varphi$ , то виникне деформація кручення сталевого дроту. Реакція дроту на дію зовнішніх сил полягатиме в появі моменту пружності  $\vec{M}_{np}$ , що прикладеному до стрижня, при цьому виконують умову:

$$\vec{M}_{np} = -\vec{M} . \quad (2.1)$$

Якщо дію зовнішніх сил припинити, то стрижень буде здійснювати оберально-коливні рухи навколо положення рівноваги.

Кінетичну енергію стрижня, що обертається навколо нерухомої осі визначають співвідношенням

$$E_k = \frac{J \omega^2}{2} , \quad (2.2)$$

де  $J$  - момент інерції тіла відносно заданої осі,  $\omega$  - кутова швидкість обертання. Вираз (2.2) визначає кінетичну енергію крутильного маятника. Повернення стрижня до положення рівноваги відбувається завдяки силам пружності, які діють зі сторони пружно-здеформованого дроту.

Вираз для потенціальної енергії zdeформованого дроту запишемо у вигляді

$$E_p = \frac{k\varphi^2}{2} , \quad (2.3),$$

де  $k$ - модуль кручення, величина якого залежить від розмірів і пружних властивостей дроту.

Кінетична і потенціальна енергії у процесі коливань маятника взаємно

перетворюються одна в одну, але при цьому повна механічна енергія в довільний момент часу залишається сталою:

$$E = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{k\varphi^2}{2}. \quad (2.4)$$

Диференціюючи вираз (2.4) за часом, отримаємо

$$J\omega d\omega + k\varphi d\varphi = 0. \quad (2.5)$$

Враховуючи те, що  $d\varphi = \omega dt$ , а  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$ , а також використовуючи закони: Ньютона  $M = J\varepsilon$  та Гука  $M_{np} = -k\varphi$ , рівняння ((2.5) переписемо у вигляді

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi = 0, \text{ або інакше:}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (2.6),$$

де 
$$\omega_0^2 = \frac{k}{J}. \quad (2.7)$$

Рівняння (2.6) є рівнянням руху крутильного маятника. Розв'язком цього рівняння є:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (2.8).$$

де  $\varphi_0$  - максимальне відхилення рухомої частини маятника від положення рівноваги,  $\alpha$  - початкова фаза коливань,  $\omega_0$  - кругова частота.

Можна бачити, що стержень здійснює гармонійні коливання з періодом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}. \quad (2.9).$$

Вираз (2.9) випливає з (2.6), як наслідок того, що періодом косинуса є  $2\pi$ .

### 3. Виведення розрахункової формули

Робочу формулу для розрахунку моменту інерції стержня  $J$  можна отримати на підставі формули (2.9). Величина  $J$  є мірою інерції при обертальному русі тіла. Момент інерції - це скалярна величина, яка залежить від маси, форми й розмірів тіла, а також вибору осі обертання.

Так, момент інерції матеріальної точки масою  $m$ , яка знаходиться на відстані  $r$  від осі обертання, являє собою добуток  $mr^2$ , тобто

$$J = mr^2. \quad (3.1)$$

Момент інерції твердого тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моме-



нтів інерції всіх його матеріальних точок відносно цієї осі, тобто сумі добутків мас матеріальних точок на квадрати їх відстаней до осі обертання:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 . \quad (3.2)$$

Для обчислення моменту інерції різних тіл застосовують інтегральне числення. Але момент інерції тіла можна визначити і дослідним шляхом, зокрема так, як описано у цій лабораторній роботі.

Якщо підвісити на дроті стрижень і закрутити дріт, то утворений маятник буде здійснювати крутильні коливання навколо положення рівноваги. При цьому період коливань  $T$  буде тим більший, чим більший момент інерції підвішеного тіла. Час повного коливання  $T$  (тобто період коливань) виражають формулою (2.9), в якій  $k$  - постійна величина, що залежить від матеріалу дроту і називається коливальною жорсткістю, або модулем кручення. Оскільки ця величина не відома, в роботі її позбуваються в такий спосіб.

Приєднуючи до підвішеного стрижня друге тіло з моментом інерції  $J_1$ , змінюють момент інерції системи, а також період її коливань

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J + J_1}{k}} . \quad (3.3)$$

З формул (2.9) та (3.3) визначають  $k$  :

$$k = \frac{4\pi^2 J}{T^2} , \quad k = \frac{4\pi^2 (J + J_1)}{T_1^2} . \quad (3.4)$$

Оскільки модуль кручення при незмінних зовнішніх умовах є стала величина, то, порівнявши праві частини рівнянь (3.4), можна знайти:

$$J = J_1 \frac{T^2}{T_1^2 - T^2} . \quad (3.5)$$

Якщо момент інерції приєданого тіла  $J_1$  відомий, то можна знайти момент інерції  $J$  основного тіла (стрижня).

Для зручності приєдане тіло вибирають правильної геометричної форми, момент інерції  $J_1$  якого легко знаходять обчисленням.

#### 4. Порядок виконання роботи

**4.1** Закрутити рухому частину маятника приблизно на  $30^\circ$  і потім відпустити. Пропустивши декілька коливань, необхідних для заспокоювання системи, визначити за допомогою секундоміра час  $t$ , за який відбулося  $n$  повних коливань (взяти  $n = 20 \div 25$ ).

**4.2** Період коливань вільного (ненавантаженого) стрижня можна знайти за формулою:

$$T = \frac{t}{n} . \quad (4.1)$$

**4.3** Підвісити на стрижень на однакових відстанях від осі обертання два тіла (наприклад, циліндри) однакової маси і визначити (з 20÷25 коливань) період  $T_1$ .

Момент інерції циліндра відносно осі обертання, що проходить через центр тяжіння циліндра паралельно його твірних, є вираз:

$$J_0 = \frac{m r^2}{2}. \quad (4.2)$$

Оскільки обертання відбувається навколо осі, яка знаходиться на відстані  $l$  від осі циліндра, то загальний момент інерції одного циліндра

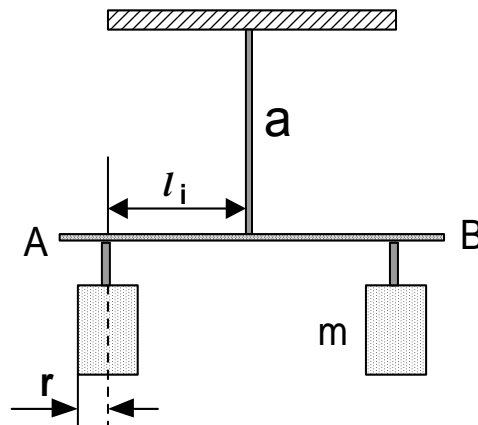


Рис. 4.1

відносно осі обертання тіла згідно з теоремою Штейнера набуває вигляду:

$$J_1 = \frac{m r^2}{2} + m l_i^2. \quad (4.3)$$

Отже, додатковий момент інерції  $J_1$  для двох циліндрів, які підвішені на кінцях стержня (на однакових відстанях від осі обертання), знаходять за формулою:

$$J_1 = 2 \left( \frac{m r^2}{2} + m l_i^2 \right), \quad (4.4)$$

де  $m$  - маса циліндра;  $l_i$  - відстань від осі обертання до осі циліндра;  $r$  - радіус циліндра.

У подальшому вимірювання періодів коливань  $T_1, T_2, T_3$  проводять при різних відстанях тягарців від осі обертання, тобто при  $l_1, l_2, l_3$ .

Потім, за одержаними експериментальними результатами обчислюють момент інерції додаткового  $J_i$  та основного  $J$  тіл.

Усі результати заносять до табл. 4.1.

Таблиця 4.1

№ дос	$l$ м	$n$	$t_i$ с	$t_{cp}$ с	$T_{cp}$ с	$J_i$ кг·м <sup>2</sup>	$J$ кг·м <sup>2</sup>	$\Delta t$ с	$\Delta T_{cp}$ с	$\Delta J$ кг·м <sup>2</sup>	$\Delta J/J$ %
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											

У даній роботі додатковими можуть бути тіла й іншої форми. У разі їх використання момент інерції, зокрема для відстані  $l_1$  слід обчислювати відповідно до теореми Штейнера за формулами

1) для двох куль - 
$$J_1 = 2 \left( \frac{2mr^2}{5} + ml_1^2 \right); \quad (4.5)$$

2) двох порожнистих циліндрів - 
$$J_1 = 2 \left( \frac{m}{12} (3r^2 + 3r_0^2 + h^2) + ml_1^2 \right) \quad (4.6)$$

у випадку, коли вісь проходить через середину циліндрів, перпендикулярно до їх твірних, де  $r$  і  $r_0$  – зовнішній і внутрішній радіуси циліндра;

3) двох додаткових стрижнів - 
$$J_1 = 2 \left( \frac{ml^2}{12} + ml_1^2 \right), \quad (4.7)$$

де  $j_0 = \frac{ml^2}{12}$  - момент інерції стержня відносно осі, що проходить через його середину перпендикулярно його довжині  $l$ .

### 5. Контрольні запитання і завдання

1. Дайте визначення моменту інерції матеріальної точки, тіла.
2. Який фізичний зміст моменту інерції?
3. Напишіть і поясніть основний закон динаміки обертального руху.
4. Сформулюйте теорему Штейнера.
5. Від чого залежить період крутильних коливань системи?
6. Виведіть робочу формулу (3.5).
7. Запишіть момент інерції тіл правильної геометричної форми:
  - а) циліндра; б) стрижня; в) кулі.

## Лабораторна робота № 4

### ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ВІДНОВЛЕННЯ ТА ЧАСУ СПІВУДАРУ ПРУЖНИХ КУЛЬОК

**Мета роботи:** Визначити коефіцієнт відновлення і час співудару у випадку пружного центрального удару кульок.

#### 1. Прилади та обладнання.

1.1 Установка, яка складається: з джерела постійного струму  $E$ ; електромагнітів  $M_1$  і  $M_2$  з фіксаторами; опору  $R$ ; конденсатора  $C$ ; вимірювача напруги  $V$  двох кульок, що підвішені на струмопровідних нитках.

#### 2. Загальні положення

При центральному абсолютно пружному ударі двох кульок (на основі законів збереження енергії та імпульсу) їх відносна швидкість змінює свій напрям на протилежний, залишаючись незмінною за величиною. У випадку не зовсім абсолютно пружного удару частина кінетичної енергії кулок переходить в енергію залишкової деформації, що призводить до зменшення їх відносної швидкості за абсолютною величиною. Для кількісної оцінки зменшення відносної швидкості вводять коефіцієнт відновлення  $K$ , що характеризує пружні властивості матеріалу, з якого зроблені кульки:

$$K = \frac{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}, \quad (2.1)$$

де  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  і  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  - швидкості куль до і після співудару, відповідно.

Нехай дві однакові кульки (рис.2.1) висять на нитках однакової довжини  $l$ . Якщо обидві кульки відхилити на однакові кути і відпустити, то швидкості їх в момент співудару будуть однакові.

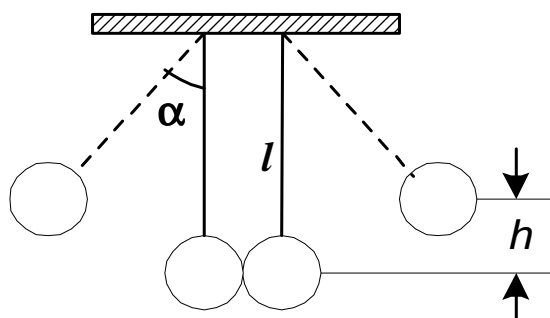


Рис. 2.1

Передударну швидкість кульки можна розрахувати, користуючись співвідношенням, що випливає із закону збереження енергії:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad (2.2)$$

де  $h$  - висота підйому кулі.

Знайдемо зв'язок між величиною  $h$  і кутом  $\alpha_0$ , на який відхиляється кулька.  
З рис. 2.1 випливає, що

$$h = l(1 - \cos \alpha_0) = 2l \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} . \quad (2.3)$$

При малих кутах можна прийняти  $\sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \approx \left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2$ .

Тоді із співвідношень (2.2) і (2.3) дістанемо

$$v = \alpha_0 \sqrt{gl} . \quad (2.4)$$

З аналогічної формули можна знайти швидкість кульки після удару, а отже визначити і величину  $K$ . Дійсно, якщо у формулу (2.1) підставити  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 = \vec{v}$  і  $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2 = \vec{u}$ , то можна записати:

$$k = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \quad (2.5)$$

З урахуванням співвідношення (2.4) формула (2.5) набуває вигляду:

$$k = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} . \quad (2.6)$$

де  $\alpha_0, \alpha_1$  - кути відхилення кульок до і після співудару. Оскільки зменшення кута відхилення після першого удару мале, що викликає похибки у визначенні  $K$  із формули (2.6), треба вимірювати  $\alpha$  після 10-15 співударів. У цьому випадку формула (2.6) має бути видозмінена. Для першого співудару  $K = \alpha_1 / \alpha_0$ , для другого співудару  $K = \alpha_2 / \alpha_1$  і т.п.; для  $n$ -го співудару  $K = \alpha_n / \alpha_{n-1}$ . Якщо перемножити ці рівняння, одержимо

$$k = \sqrt[n]{\frac{\alpha_n}{\alpha_0}} . \quad (2.7)$$

Час співудару двох кульок  $\tau$  визначають експериментально за часом розряду конденсатора згідно із схемою, що наведена на рис. 2.2.

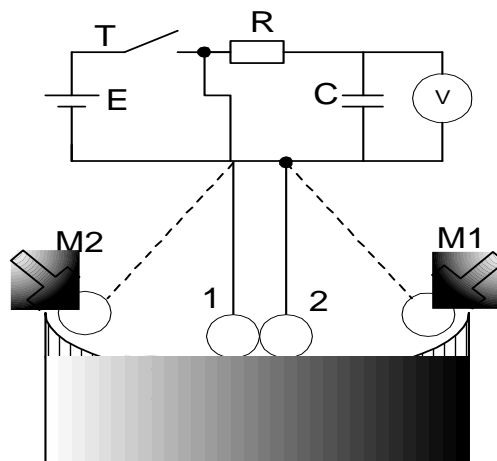


Рис. 2.2

Якщо кульки включити до електричного кола, що має опір  $R$  і конденсатор ємністю  $C$ , що заряджений до напруги  $u_0$ , вимірюваної вольтметром  $V$ , то під час співудару кульок конденсатор буде розряджатися (рис.2.2). Величина падіння напруги на конденсаторі пов'язана з часом співудару кульок  $\tau$  рівнянням:

$$u_n = u_0 \exp\left(-\frac{n\tau}{RC}\right). \quad (2.8)$$

Логарифмуючи цей вираз, дістанемо

$$\tau = \frac{RC}{n} \ln \frac{u_0}{u_n}, \quad (2.9)$$

де  $u_0$  - напруга до співудару,  $u_n$  - напруга після  $n$ -го співудару кульок.

Формула (2.9) дозволяє встановити середнє значення  $\tau$ .

Як відомо, при не пружному ударі двох кульок їх кінетична енергія переходить в потенційну енергію пружної деформації і енергію залишкової деформації  $W$ . Останню можна визначити в такий спосіб. Записують закон збереження енергії для удару двох кульок:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} + 2W. \quad (2.10)$$

Враховуючи прийняті раніше позначення швидкостей, можна отримати

$$mv^2 = mu^2 + 2W, \quad (2.11)$$

звідки 
$$W = \frac{mv^2}{2}(1 - K^2). \quad (2.12)$$

Величину середньої сили удару  $F$  можна знайти із співвідношення

$$\int_0^{\tau} F dt = \int_{-v}^u m dv. \quad (2.13)$$

(Знаки швидкостей беруть згідно з їх напрямом відносно векторів сили).

У результаті інтегрування можна записати

$$F\tau = m(u + v). \quad (2.14)$$

Звідси

$$F = \frac{mv}{\tau}(1 + K). \quad (2.15)$$

### 3. Опис приладу

В установці (рис. 2.2) використовують дві металеві кульки 1, 2, що підвішені на біфілярних підвісах довжиною  $l$ , що забезпечують коливання кульок у вертикальній площині. Кульки утримуються у відхиленому положенні двома електромагнітами  $M_1$  і  $M_2$ . Останні можна легко переміщувати по шкалі  $A$  і по-

тім фіксувати. Кути відхилення кульок від положення рівноваги відліковують по шкалі (в градусах). Електромагніти та інтегруюче  $RC$  - коло живляться від джерела постійного струму. Спад напруги на конденсаторі в його зарядженому стані і під час розряду при ударі кульок виміряють цифровим вольтметром.

#### 4. Послідовність виконання роботи

##### 4.1 Визначити коефіцієнт відновлення $K$ :

- а) включити електромагніти і встановити їх так, щоб кульки були відхилені на однаковий заданий початковий кут  $\alpha_0$  ( $12 \div 20^\circ$ );
- б) виключити електромагніти і почати відлік співударів (початковий кут  $\alpha_0$  та число співударів  $n$  задає викладач);
- в) записати кут відхилення кульок після останнього співудару  $\alpha_n$ ;
- г) повторити досліди при інших початкових кутах і за формулою (2.7) обчислити середнє значення  $K$ . (Для вимірювань брати не менше 4 початкових кутів).

##### 4.2. Визначити час співудару кульок $\tau$

- а) при розведених кулях на кут  $\alpha_0$  замкнути тумблер  $T$  (рис.2.2) і зарядити конденсатор до напруги  $u_0$ ;
- б) тумблер  $T$  розімкнути, привести кульки в рух і після  $n$ -го співудару записати показання вольтметра (залишкова напруга на конденсаторі);
- в) досліди повторити при інших початкових кутах і за формулою (2.9) визначити середнє значення  $\tau$ ;
- г) виразити  $\alpha_0$  у радіанах. Величину швидкості обчислити за формулою (2.4). Зверніть увагу на те, що ємність конденсатора  $C$ , величина опору  $R$ , через який розряджається конденсатор, а також маса  $m$  куль і довжина підвіски куль  $l$  указані в таблиці, що закріплена на установці.

**4.3** Обчисліть енергію залишкової деформації  $W$  за формулою (2.12), використовуючи дослідні дані для  $\alpha_0$ ,  $V$  і  $K$ .

б) побудуйте графік залежності  $W = f(v)$ ;

##### 4.4 Обчисліть середню силу удару $F$ :

- а) користуючись формулою (2.15) і результатами попередніх обчислень, розрахувати  $F$  для заданих початкових кутів  $\alpha_0$ ;
- б) побудувати на міліметровому папері графік залежності  $F = f(v)$ .

Отримані результати занести до табл.4.1.

Таблиця 4.1

$\alpha_0$ град.	n	Ліва шкала, (град.)			Права шкала, (град.)			$\bar{\alpha}_n$ град.	К	v	n	$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\bar{u}$	$\tau$	F	W	
		$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$													м/с

**4.5** Обчисліть відносну й абсолютну похибки величини  $K$  за відповідними формулами (2.16) і (2.17), а саме:

$$\frac{\Delta K}{K} = \left[ \frac{\Delta \alpha_n}{n \alpha_n} + \frac{\Delta \alpha_0}{n \alpha_0} \right] 100\% , \quad (2.16)$$

$$\Delta K = K \left[ \frac{\Delta \alpha_n}{n \alpha_n} + \frac{\Delta \alpha_0}{n \alpha_0} \right] . \quad (2.17)$$

### 5. Контрольні запитання

1. Які властивості матеріалу характеризує величина  $K$ , і в яких межах її величина може змінюватися?
2. Чому для визначення величини  $K$  беруть серію ударів?
3. Які фактори впливають на величину  $\tau$ ?
4. Як змінюється кінетична енергія кульок і їх відносна швидкість при різних видах удару: абсолютно пружному, не пружному, абсолютно не пружному?
5. Які закони фізики покладені в основу виведення формули для обчислення величини енергії залишкової деформації, середньої сили удару?
6. На якому принципі заснований метод визначення часу співудару кульок?
7. Чи може бути величина  $K > 1$ ?
8. Чому для визначення параметра  $\tau$  обирають не механічний, а електронний спосіб вимірювання?

### Лабораторна робота № 5

#### ДОСЛІДЖЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ ТІЛ РІЗНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ

**Мета роботи:** визначити моменти інерції тіл різної геометричної форми методом незгасаючих крутильних коливань.

#### 1. Прилади та обладнання.

- 1.1. Прилад з диском для створення крутильних незгасаючих коливань.
- 1.2. Набір досліджуваних тіл.
- 1.3. Секундомір.
- 1.4. Лінійка.
- 1.5. Штангенциркуль.

#### 2. Загальні положення

Основне рівняння динаміки обертального руху (другий закон Ньютона для тіла, яке обертається навколо осі) має вигляд

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = J \vec{\beta}, \quad (2.1)$$



де  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i$  - рівнодійна моментів усіх сил, що діють на тіло, відносно осі обертання,  $J$  - момент інерції тіла відносно тієї ж осі,  $\vec{\epsilon}$  - кутове прискорення тіла.

Момент інерції матеріальної точки  $J$  відносно деякої осі - це величина, яка чисельно рівна добутку маси точки на квадрат її відстані  $r$  до осі обертання:

$$J = m r^2 \quad (2.2)$$

Для тіл обмежених розмірів момент інерції визначають як суму моментів інерції окремих матеріальних точок (елементарних мас  $\Delta m$ ), на які можна розкласти тіло:

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2. \quad (2.3)$$

Якщо  $\rho$  - густина тіла в даній точці, то

$$\Delta m_i = \rho \Delta V_i, \quad (2.4)$$

Здійснюючи граничний перехід при  $\Delta V_i \rightarrow 0$ , одержимо вираз для визначення моменту інерції тіла шляхом інтегрування:

$$J = \int_v \rho r^2 dV \quad (2.5)$$

де  $V$  - об'єм тіла.

Використовуючи цей вираз для тіл правильної геометричної форми, легко одержати конкретні алгебраїчні вирази для обчислення моменту інерції  $J_0$  відносно осі обертання, яка проходить через центр інерції даного тіла. Так, зокрема,

- для диску (циліндра)  $J_0 = \frac{m R^2}{2}; \quad (2.6)$

- для кульки  $J_0 = \frac{2 m R^2}{5}; \quad (2.7)$

- для стрижня  $J_0 = \frac{m l^2}{12}, \quad (2.8)$

де  $m$  - маса тіла;  $R$  - радіус диска або кульки;  $l$  - довжина стрижня.

Слід зауважити, що одне і те ж тіло відносно різних осей має різні моменти інерції. За теоремою Штейнера момент інерції тіла  $J$  відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла  $J_0$  відносно осі, паралельній даній, яка проходить через центр інерції тіла, і добутку маси тіла  $m$  на квадрат відстані  $l$  між осями:

$$J = J_0 + m l^2. \quad (2.9)$$

Існує багато методів експериментального визначення моментів інерції. У цій роботі використовується метод крутильних незгасаючих коливань.

### 3. Опис установки та виведення розрахункових формул

Установка (рис. 3.1) складається із станини 1 з укріпленою на ній вертикальною віссю 2, навколо якої обертається диск 3, з'єднаний зі станиною пружиною 4, що дозволяє диску після виведення з положення рівноваги здійснювати крутильні коливання. Для вертикального встановлення осі обертання диска використовують гвинти 5.

Для розміщення дослідних тіл на диску просвердлені два взаємно перпендикулярні ряди отворів.

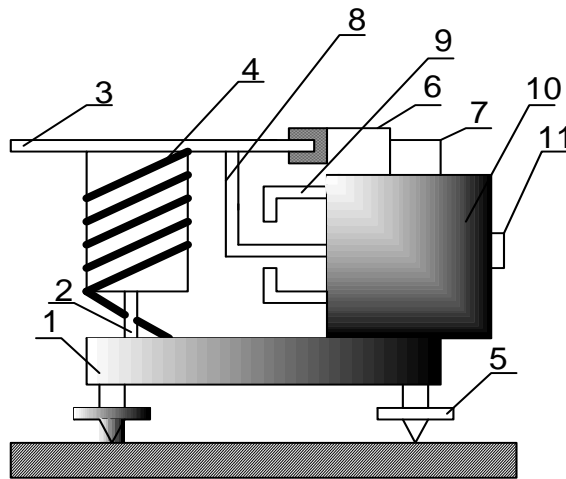


Рис. 3.1

Установка комплектується еталонним тілом правильної геометричної форми з відомими параметрами. Для того, щоб коливання були незгасаючими, установка має електромагнітний привід, що складається з якоря 8 та електромагніту 9. При проходженні диском положення рівноваги пристрій 10 включає електромагніт і внаслідок втягування якоря в зазор швидкість обертання трохи збільшується. Коли якорь починає виходити із зазору, електромагніт виключається. Індикатором включення електромагніту служить лампочка 11, за спалахами якої можна рахувати число коливань диска.

Якщо за рахунок моменту зовнішніх сил  $\vec{M}$  повернути диск на кут  $\varphi$  від положення рівноваги, то з боку пружини на нього діятиме момент сили  $M_{np}$ , пропорційний (в умовах пружної деформації) куту  $\varphi$ :

$$M_{np} = -k\varphi, \quad (3.1)$$

де  $k$  - коефіцієнт пружної жорсткості пружини.

Враховуючи співвідношення (3.1) та  $M = J\varepsilon$ , рівняння руху диска запишемо у вигляді:

$$J_d \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi = 0, \quad (3.2)$$

де  $J_d$  - момент інерції диску.

При вирішенні рівняння (3.2) можна впевнитися, що диск здійснює гармонічні коливання навколо положення рівноваги за законом:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (3.3)$$

де  $\varphi_0$  - кутова амплітуда коливань,  $\omega$  - кругова частота,  $\alpha$  - початкова фаза. Оскільки період косинуса становить  $2\pi$ , то період гармонічних коливань диска  $T_D$  визначають зовнішніми параметрами  $J_D$  і  $k$ :

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_D}{K}}. \quad (3.4)$$

Закріплення на диску тіла з моментом інерції  $J$  змінить період коливань:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_D + J}{K}}. \quad (3.5)$$

Для визначення моменту інерції диска  $J_D$  використовують еталонне тіло з відомим моментом інерції  $J_{ет}$ , яке дорівнює  $J_0$ , що обчислюється за формулами (2,6 ÷ 2,8). У подальшому вимірюють періоди коливань ненавантаженого диска  $T_D$  і диска з еталонним тілом  $T_{ет}$ , і складають систему рівнянь (3,6), аналогічних (3.4) і (3.5):

$$\begin{cases} T_D^2 = \frac{4\pi^2}{k} J_D \\ T_{ет}^2 = \frac{4\pi^2}{k} (J_D + J_{ет}) \end{cases}, \quad (3.6)$$

розв'язавши яку, знаходять:

$$J_D = J_{ет} \frac{T_D^2}{T_{ет}^2 - T_D^2}, \quad (3.7)$$

а потім у відповідності з (3.4) величину

$$k = \frac{4\pi^2 J_D}{T_D^2}. \quad (3.8)$$

Розташовуючи на диску досліджуване тіло замість еталонного, можна отримати аналогічне (3.7) рівняння

$$J_D = J \frac{T_D^2}{T^2 - T_D^2}, \quad (3.9)$$

де  $J$  - момент інерції досліджуваного тіла,  $T$  - період коливань диска з цим тілом.

Якщо на диску розташовані симетрично два досліджувані тіла з однако-

вими моментами інерції, то замість рівняння (3.9) одержують шукане рівняння у вигляді:

$$J = \frac{J_D}{2} \left[ \left( \frac{T}{T_D} \right)^2 \right] - 1. \quad (3.10)$$

#### 4. Послідовність виконання роботи

**4.1** Перед виконанням дослідів необхідно від'юстувати установку так, щоб вісь обертання диска була вертикальною. Вимірювання можна проводити тільки після встановлення стабільної амплітуди коливань (через 20-30с після вмикання установки).

**4.2** Визначити період коливань  $T_D$  ненавантаженого диска. Для цього провести не менше п'яти вимірювань часу  $t_d$  для  $n = 20-25$  повних коливань, і визначити  $T_D$  за формулою:

$$T_D = \frac{t_{cp}}{n}, \quad (4.1)$$

де  $t_{cp}$  - середній час для  $n$  коливань.

Оцінити похибку вимірювання часу  $\Delta t_d$ . Результати занести до табл. 4.1.

Таблиця 4.1

№ вимірювань	$t_d$	$t_{д с р}$	$T_d$	$\Delta T_d$	$t_{ет}$	$t_{ет с р}$	$T_{ет}$	$J_{ет}$	$J_d$	$\delta J_d$	$\Delta J_d$	$\kappa$
	с	с	с	с	с	с	с	кг·м <sup>2</sup>	кг·м <sup>2</sup>	%	кг·м <sup>2</sup>	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$
1												
2												
3												
4												
5												

**4.3** Записати параметри еталонного тіла ( $\epsilon$  на робочому місці) і обчислити за відповідною формулою (2.6) - (2.8) момент інерції  $J_{ет}$  еталонного тіла. Результат занести до табл. 4.1. (У даному випадку  $J_{ет} = J_0$ .)

**4.4** Визначити період коливань  $T_{ет}$  диска з розміщеним у його центрі еталонним тілом. З цією метою повторити всі дії за п.4.2. Усі результати вимірювань і розрахунків занести до табл.4.1.

**4.5** За формулою (3.7) визначте момент інерції ненавантаженого диска  $J_d$ . Використовуючи знайдені похибки у визначенні періодів коливань  $\Delta T_d$  та  $\Delta T_{ет}$ , обчисліть відносну та абсолютну похибки  $\delta J_d$  та  $\Delta J_d$  відповідно. Результати занести до табл. 4.1.

**4.6** Установіть на диск два однакових досліджуваних тіла симетрично на рівних відстанях  $l$  від осі обертання. Для усіх варіантів установки тіл, визначте час  $t$  для  $n = 20-30$  повних коливань диска. Виміряти штангенциркулем радіус  $R$  тіл. Усі результати занести до табл.4.2

Таблиця 4.2

№ дослід- ду	n	$l_i$	$t$		$t_{cp}$	$T_i$	$l^2$	R	$J_i$
		м	с		с	с	м <sup>2</sup>		
1									
2									
3									
4									
5									

**4.7** За формулами (3.10), (4.1) розрахувати  $J$  і  $T$ , а також обчислити квадрати відповідних відстаней  $l^2$ , що встановлені на диску тіл від осі обертання. Результати внести до табл. 4.2.

**4.8** На міліметровому папері побудувати графік залежності моменту інерції досліджуваного тіла  $J$  від квадрату відстані  $l^2$ . При побудові графіка початок координатних осей має збігатися з нулем, тобто  $l^2 = 0$  та  $J = 0$ , як зображено на рис. 4.1. Оскільки момент інерції розташованих на диску тіл визначають за теоремою Штейнера (формула (2.9) - типу  $y = a + bx$ ), то побудована на рис. 4.1 залежність  $L(l^2)$  являє собою пряму лінію, що проведена у середньому близько до всіх дослідних точок.

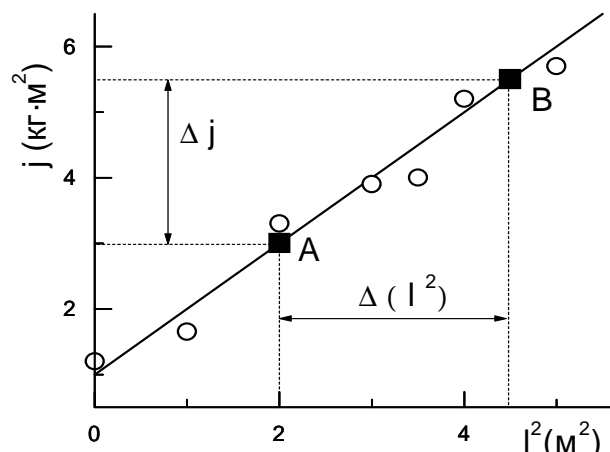


Рис. 4.1

З формули (2.9) випливає, що маса досліджуваного тіла відіграє роль коефіцієнта "b" при аргументі " $l^2$ " і може бути визначена для будь-яких двох точок A і B на прямій (див. рис.4.1) за формулою:

$$m = \frac{\Delta J}{\Delta(l^2)}. \quad (4.1)$$

Відповідно до (2.9) пряма графіка, що зображена на рис.4.1 відсікає на осі ординат відрізок, який дорівнює моменту інерції  $J_0$  тіла, відносно осі, що проходить через його центр інерції. Проводячи через найбільш віддалені експериментальні точки пунктирні лінії, паралельні прямій AB, визначте похибку вимірювання моменту інерції  $\Delta J$  досліджуваного тіла.

**4.9** Використовуючи знайдену  $m$  та R, за відповідною формулою (2.6) - (2.8), обчисліть момент інерції досліджуваного тіла  $J_{0,теор}$ , і порівняйте його з  $J_0$

визначеним графічно (рис.4.1). Із графіка також визначте абсолютну похибку  $\Delta J_0$  і порівняйте її з  $\Delta J_{0 \text{ теор}}$ .

**4.10** За формулою (3.8) знайдіть величину  $k$ .

## 5. Контрольні запитання

1. Які фізичні властивості тіла характеризує момент інерції?
2. Як можна обчислити момент інерції твердого тіла правильної геометричної форми?
3. Сформулюйте основний закон динаміки для випадків поступального й обертального рухів.
4. Виведіть робочу формулу для визначення моменту інерції твердого тіла методом крутильних коливань.
4. Сформулюйте теорему Штейнера.
5. Від чого залежить період крутильних коливань?
6. Запишіть формулу кінетичної енергії тіла, що обертається.
7. Як визначають роботу при обертанні тіла навколо фіксованої осі?

## Лабораторна робота № 6

### ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА

**Мета роботи:** визначити прискорення вільного падіння тіл за допомогою оборотного фізичного маятника.

#### 1. Прилади та обладнання.

- 1.1. Оборотний фізичний маятник з кронштейном.
- 1.2. Секундомір.
- 1.3. Лінійка.

#### 2. Загальні положення

Фізичний маятник – це будь-яке тверде тіло (рис.2.1), що коливається навколо нерухомої точки, яка не збігається з його центром інерції. На рис.2.1 точкою  $O$  позначена вісь обертання фізичного маятника, а точкою  $C$  - центр інерції маятника. Точка  $K$ , що лежить на прямій, яка єднає вісь обертання з центром інерції, на відстані приведеної довжини  $l_{пр}$  від осі обертання, є центром качання фізичного маятника.

При відхиленні маятника від вертикалі на кут  $\varphi$  виникає механічний повертальний момент сили тяжіння:

$$M = -mg a \sin \varphi, \quad (2.1)$$

де  $m$  - маса маятника;  $a$  - відстань між віссю обертання і центром інерції маятника.

Він направлений у протилежний бік кутовому зміщенню, тому намагається по-

вернути маятник у стан рівноваги. Якщо ж відхилений маятник відпустити, то він почне коливатись навколо положення рівноваги.

Оскільки під час коливань маятника діє тільки цей момент, то рівняння динаміки обертального руху матиме вигляд:

$$I\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi \quad \text{або} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (2.2),$$

де  $I$  – момент інерції тіла відносно горизонтальної осі обертання  $O$ , що має назву “точка підвісу”. При малих кутах відхилення  $\sin \varphi \approx \varphi$ , маємо:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I} \cdot \varphi = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (2.3),$$

де  $\omega^2 = \frac{mga}{I}$ . Розв’язком рівняння (2.3) є вираз  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , який свідчить про те, що  $\varphi$  змінюється за гармонічним законом з круговою частотою

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \quad (2.4)$$

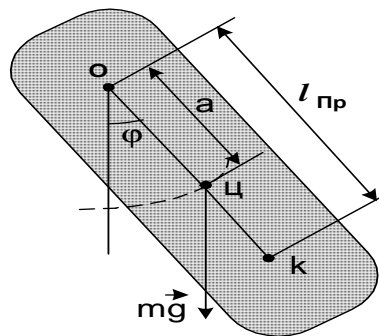


Рис. 2.1

### 3. Виведення розрахункової формули

Відповідно до (2.4), при малих відхиленнях від положення рівноваги, період коливань  $T$  фізичного маятника визначають за формулою:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}, \quad (3.1)$$

де  $g$  - прискорення вільного падіння.

Приведеною довжиною фізичного маятника  $l_{пр}$ , яка залежить від розподілу маси вздовж маятника, називають величину

$$l_{пр} = \frac{J}{ma}, \quad (3.2)$$

Величина  $l_{пр}$  дорівнює довжині математичного маятника з періодом коливань, що дорівнює періоду даного фізичного маятника.

Використовуючи (3.2), наближену формулу для періоду коливань фізич-

ного маятника можна записати у вигляді:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{np}}{g}}. \quad (3.3)$$

При великих кутах відхилення маятника від положення рівноваги величина  $T$  стає амплітудно залежною. У цьому випадку формула (3.3) стає не придатною, тому замість (2.3) розглядають диференціальне рівняння коливань маятника (2.2), яке при його розв'язанні дає вираз для періоду коливань:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right], \quad (3.4)$$

де  $\alpha$  - амплітуда коливання.

Досить добре наближення дає і формула

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \right), \quad (3.5)$$

де кут  $\alpha$  виражений в радіанах. Вона є зручною для оцінки інтервалу кутів відхилень, в межах якого наближена формула (3.3) працює надійно.

З'ясуємо деякі властивості точки підвісу  $O$ , центра качання  $K$  та приведеної довжини  $l_{np}$ . Якщо відповідно до теореми Штейнера про момент інерції написати вираз для моменту інерції маятника  $I = I_0 + ma^2$  і підставити його в (3.2), то отримаємо:

$$l_{np} = \frac{I_0}{ma} + a. \quad (3.6)$$

З формули (3.6) випливає, що  $l_{np}$  завжди більша за  $a$ , тому точка підвісу  $O$  і центр коливання  $K$  завжди лежать по різні боки від центра інерції. Тепер підвісимо маятник у точці, що збігається з центром коливання  $K$ . У відповідності з (3.6) приведена довжина в цьому випадку буде дорівнювати:

$$l'_{np} = \frac{I_0}{ma'} + a', \quad (3.7)$$

де  $a'$  - відстань між точками  $K$  і  $C$ . Враховуючи те, що  $a' = l_{np} - a$ , то вираз (3.7) можна записати у вигляді:

$$l'_{np} = \frac{I_0}{m(l_{np} - a)} + l_{np} - a. \quad (3.8)$$

Знаходячи вираз для  $a = \frac{I_0}{m(l_{np} - a)}$  з рівняння (3.6) і підставляючи його в (3.8), знаходимо, що  $l'_{np} = l_{np}$ .



Це означає, що коли поміняти місцями точки  $O$  і  $K$ , які розташовані на відстані  $l_{\text{пр}}$  одна від одної, то період коливань маятника залишиться незмінним. Це свідчить про те, що вказані точки є взаємно спряжені. Користуючись згаданою властивістю взаємності, можна дослідним шляхом знайти такі дві несиметричні точки підвісу, відносно яких період коливань буде однаковий. Надалі, вимірюючи відстань між цими точками, яка дорівнює  $l_{\text{пр}}$  і, період коливань  $T$ , можна знайти за допомогою (3.3) прискорення вільного падіння  $g$ .

#### 4. Опис дослідної установки

Для визначення прискорення вільного падіння використовують фізичний маятник, що має на різних кінцях дві паралельні одна одній тригранні призми, на які його по черзі підвішують після повороту на  $180^\circ$ . Такий пристрій називають “оборотним маятником”.

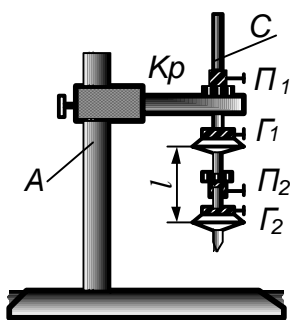


Рис. 4.1(а)

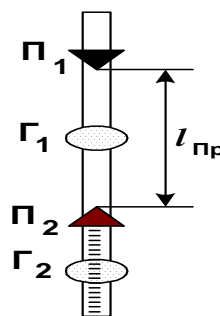


Рис. 4.1(б)

Одним із типів оборотного маятника, в якому використовують спряженість точки підвісу і центра коливання, наведений на рис.4.1. Основною частиною його є стержень  $C$ , уздовж якого можуть переміщуватися і закріплюватися в різних положеннях опорні тригранні призми  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , а також тягарці  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ . Для точного встановлення тягарців на поверхні стрижня нанесені міліметрові поділки. Маятник підвішують на одній з цих призм на кронштейні  $K_p$ , що розташовується на опорі  $A$ .

Переміщенням тягарців можна змінювати розподіл маси вздовж маятника, а відтак добитися такого положення центру тяжіння маятника, щоб період його коливань при підвішуванні на будь-яку з указаних призм був однаковим.

У цьому випадку відстань між опорними ребрами призм буде дорівнювати приведеній довжині  $l_{\text{пр}}$ .

#### 5. Послідовність виконання роботи

**5.1** Розташувати призми  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  та тягарці так, як показано на рис.4.1. Призми  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  та тягарець  $\Gamma_1$  закріпити нерухомо і їх положення на стрижні в процесі дослідів не змінювати. Тягарець  $\Gamma_2$  переміщується в процесі виконання роботи. Його положення відносно робочого ребра призми  $\Pi_2$  визначають відстанню  $l$ .

**5.2** Маятник встановити на призму  $\Pi_1$ , а тягарець  $\Gamma_2$  у початкове положення  $l = 8$  см. Відхилити маятник від положення рівноваги на кут  $\alpha = 5^\circ$  і за допомогою

секундоміра визначити час  $20 \div 25$  коливань. Досліди повторити ще двічі. Після цього обчислити середній час  $t_{cp}$ , та період коливань  $T_{cp}$  за формулою:

$$T_{cp} = \frac{t - p}{n}, \quad (5.1)$$

де  $n$  - число коливань маятника.

Аналогічні досліди повторити при інших положеннях тягарця  $\Gamma_2$ , збільшуючи при кожному кроці відстань  $l$  між  $\Pi_2$  і  $\Gamma_2$  на  $5 \div 10$  см, так щоб використати всю наявну довжину стрижня, по якому може рухатися тягарець  $\Gamma_2$ .

Результати вимірів відстані  $l$ , часу  $t$ , та періоду  $T$  занести до табл. 5.1.

**5.3** Після цього вісь обертання маятника змінити і примусити його гойдатися на призмі  $\Pi_2$ , зберігаючи той самий інтервал довжини  $l$  та число коливань  $n = 20-25$  і кут відхилення  $\alpha = 5^\circ$ . Для кожного положення тягарця  $\Gamma_2$  знаходити час  $t_{cp}$ , та період коливань  $T_{cp}$  за формулою (5.1).

При цьому кронштейн, для зручності вимірів закріпити в нижній частині вертикального стояка.

Дослідні дані, що стосуються відстані  $l$ , часу  $t$ , та періоду  $T$  занести до табл.5.1.

Таблиця 5.1

Положення маятника	№ дослідів	$n$	$l_i$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_{cp}$	$T_i$
			м	с	с	с	с	с
Опора на $\Pi_1$	1							
	2							
	3							
	4							
	5							
Опора на $\Pi_2$	1							
	2							
	3							
	4							
	5							

**5.4** Побудувати графіки залежності періодів коливань маятника  $T_1$  і  $T_2$  від відстані  $l$  так, як схематично наведено на рис.5.1. Визначити точку перетину прямих  $l_0$ , в якій  $T_1 \approx T_2$ .

**5.5** Закріпити тягар  $\Gamma_2$  на відстані  $l_0$ , визначеній графічно, і уточнити значення періодів  $T_1$  і  $T_2$  коливань маятника на призмах  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ . Для цього виміряти відповідний час  $t_1$  і  $t_2$ , протягом якого здійснюються  $n = 20$  коливань. Якщо в результаті вимірювань виявиться, наприклад, що  $t_1 > t_2$ , то це означатиме, що відстань  $l_0$  не відповідає дійсній точці перетину і її потрібно змінити в бік збільшення довжини  $l$  (при  $t_1 < t_2$  - навпаки).

Встановлюючи  $\Gamma_2$  на подовженій відстані  $l'_0$ , знову виміряти  $t'_1$  і  $t'_2$  на

призмах  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  відповідно.

Зауважимо, що збільшення відстані  $l_0$  має бути таким, щоб різниця  $(t_1-t_2)$  для першого положення  $\Gamma_2$  і  $(t_2-t_1)$  для другого - була б однаковою і не перевищувала похибку секундоміра  $\Delta t=0,3c$ . За дійсне значення часу  $n$  періодів коливань приймається середнє від усіх значень  $t_{1i}$  і  $t_{2i}$ . Результати вимірювань занести до табл.5.2.

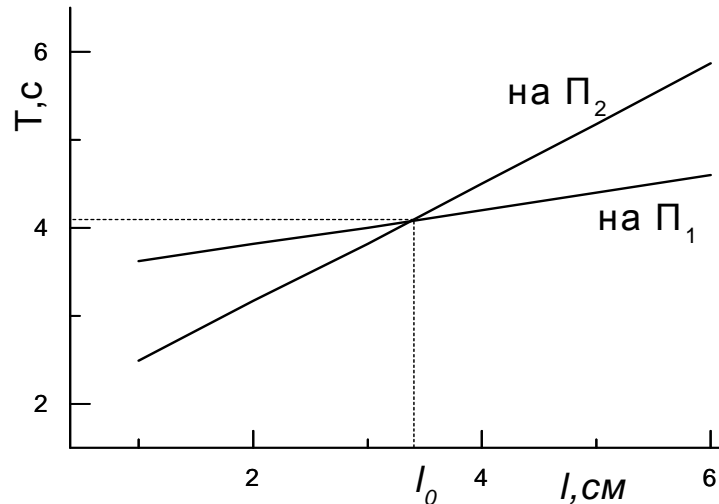


Рис. 5.1

**5.6** Для вимірювання приведеної довжини  $l_{np}$  (відстань між ребрами опорних призм  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ ), необхідно маятник зняти з кронштейна і розташувати горизонтально на робочому столі. За допомогою лінійки виміряти  $l_{np}$  з уточненням інструментальної похибки  $\Delta l_{np}$ . Результати занести до табл.5.2.

Обрахувати  $g$  за формулою (5.2), куди попередньо підставити значення періоду коливань  $T = t_{cp} / n$ :

$$g = \frac{4\pi^2 l_{np} n^2}{t_{cp}^2}. \quad (5.2)$$

Таблиця 5.2

№ досліду	n	Полож. маятника	$l_0$	$t_i$	$t_{cp}$	$\Delta t$	$l_{np}$	$\Delta l_{np}$	$g$	$\Delta g/g$	$\Delta g$
			м	с	с	с	м	м	м/с <sup>2</sup>	%	м/с <sup>2</sup>
1		на $\Pi_1$									
2		на $\Pi_2$									
3		на $\Pi_1$									
4		на $\Pi_2$									

Визначити відносну та абсолютну похибки величини  $g$  за формулами:

$$\frac{\Delta g}{g} = \left( \frac{\Delta l_{np}}{l_{np}} + \frac{2\Delta t_{cp}}{t_{cp}} + \frac{2\Delta n}{n} \right) 100\% ; \quad (5.3)$$

$$\Delta g = g \left( \frac{\Delta l_{np}}{l_{np}} + \frac{2\Delta t_{cp}}{l_{cp}} + \frac{2\Delta n}{n} \right). \quad (5.4)$$

При ретельному виконанні усіх вимірювань  $\Delta n = 0$ . Основну роль відіграють похибки використовуваних у досліді приладів  $\Delta l_{np}$  і  $\Delta t_{cp}$ . Кінцевий результат записати у вигляді, м/с<sup>2</sup>:

$$g = g_{cp} \pm \Delta g \quad (5.5)$$

## 6. Контрольні запитання

1. Що називають математичним маятником?
2. Що називають фізичним маятником?
3. Якими силами визначають на поверхні Землі прискорення вільного падіння тіл?
4. Як залежить прискорення вільного падіння від широти місцевості?
5. Як змінюється прискорення вільного падіння при збільшенні висоти  $H$  тіла над поверхнею Землі?
6. Дати визначення приведеної довжини маятника?
7. У чому проявляється спряженість точки підвісу і центра коливання?

## Лабораторна робота № 7

### ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ТЯЖІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

**Мета роботи:** визначити прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника.

#### 1. Прилади та обладнання.

- 1.1. Установка для вивчення гармонічних коливань.
- 1.2. Секундомір.
- 1.3. Повзунок для фіксації довжини маятника.

#### 2. Загальні положення

Гармонічний коливальних рух – це такий періодичний процес, в якому зміна спостережуваної величини відбувається за законом синуса або косинуса. Такі коливання зручно спостерігати за допомогою плоского математичного маятника, який являє собою коливальну систему, що складається з матеріальної точки, що прикріплена до кінця невагомої нитки, другий кінець якої закріплений нерухомо (рис.2.1).

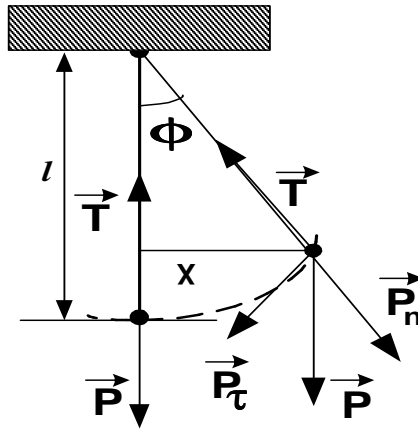


Рис. 2.1

У стані спокою маятника сила тяжіння  $P$  врівноважується силою натягу нитки  $T$ . При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут  $\varphi$  дотична складова сили тяжіння  $P_\tau = P \sin \varphi$ , спрямована в бік положення рівноваги. Тобто ця складова, на відміну від нормальної складової  $P_n$ , стає не врівноваженою. У наближенні малого кута ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ), маємо  $P_\tau = P \varphi$ , а вираз для відхилення  $x$  від положення рівноваги має вигляд:

$$x = l\varphi, \quad (2.1)$$

де  $l$  – довжина маятника ( відстань від точки підвісу до центра тяжіння тягарця).

Рух маятника відбувається під дією поворотальної сили  $P_\tau = P \varphi = mg \frac{x}{l}$ , величина якої змінюється пропорційно відхиленню  $x$  його від нормалі, і направленої в бік положення рівноваги. Відповідно до другого закону Ньютона рівняння руху набуває вигляду:

$$m\ddot{x} = -mg \frac{x}{l} \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (2.2)$$

де  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  ( $\omega$  - кругова частота математичного маятника). Розв'язком рівняння (2.2) є вираз:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.3)$$

де  $A$  - амплітуда,  $(\omega t + \alpha)$  - фаза,  $\alpha$  - початкова фаза гармонічних коливань. Оскільки період косинуса становить  $2\pi$ , то період коливання  $T$ , тобто час одного повного коливання, можна знайти за умови:

$$A \cos[\omega(t+T) + \alpha] = A \cos(\omega t + 2\pi + \alpha). \quad (2.4)$$

Звідси 
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2.5)$$

де  $g$  - прискорення вільного падіння. Формула (2.5) дає змогу визначити прискорення сили тяжіння  $g$ , якщо відомі  $T$  і  $l$ .

При великих кутах відхилення наближене рівняння (2.2) стає непридатним, оскільки воно описує рух матеріальної точки по дузі малої кривизни (близької до прямої). У таких випадках відхилення маятника від положення рівноваги характеризують кутом  $\varphi$ , який утворений ниткою з нормаллю (рис. 2.1). Тоді рівняння коливань необхідно записати так:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad \text{або} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (2.6)$$

як рівняння обертання навколо горизонтальної осі, що проходить через точку підвісу. У рівнянні (2.6):  $ml^2$  - момент інерції,  $\ddot{\varphi}$  - кутова швидкість.

У цьому випадку рух маятника під дією обертального моменту  $M = -mgl \sin \varphi$  також буде періодичним, але не гармонічним, оскільки величина  $T$  стає залежною від амплітуди. Вирішуючи рівняння (2.6), можна отримати вираз для періоду коливань:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right]}, \quad (2.7).$$

де  $\alpha$  - амплітуда коливань, тобто найбільший кут, на який маятник відхиляється від положення рівноваги.

Формула (2.7) на відміну від (2.5) містить у собі поправку  $f(\alpha)$ , яка враховує амплітудну залежність параметра  $T$ , що дозволяє обрахувати період при довільних кутах відхилення маятника. Результати обчислень функції  $f(\alpha)$  наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

$\alpha$ , град.	0	2	5	10	15
$f(\varphi)$	1,0000 0	1,0000 5	1,0004 8	1,00194	1,0043
$\Delta T/T$ , %	0	0,004	0,04	0,19	0,43

На підставі даних таблиці 2.1, можна визначити межі застосовності формули (2.5). Нехай  $l = 1$  м і  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>, тоді з формули (2.5) отримуємо  $T = 2,00504$  с. Обчислимо відносні похибки періоду коливань  $\Delta T/T$  і занесемо їх до таблиці 2.1. Аналіз опрацьованих результатів показує, що формулу (2.5), при точності вимірювання періоду коливань (до 0,19%) можна використовувати для кутів відхилення маятника  $\leq 10^\circ$ .

## 1. Виведення розрахункових формул

Для практичного визначення прискорення сили тяжіння використовують важку кульку, що підвішена на тонкій нитці, період коливань якої можна визначити з певною точністю за допомогою формули (2.5).

Однак, оскільки довжину реального маятника (відстань від точки підвісу до центра інерції кульки) визначити досить важко, то при обчисленнях  $g$  використовують не саму довжину  $l$ , а різницю довжин  $\Delta l$ . Для проведення більш детального аналізу перепишемо рівняння (2.5) у вигляді:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l . \quad (3.1)$$

З рівняння (3.1) випливає наступне. Якщо експериментально встановити залежність  $T^2 = f(l)$ , то за кутом нахилу  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_2^2 - T_1^2}{l_2 - l_1}$  можна визначити абсолютне значення параметра  $g$  за формулою:

$$g = \frac{4\pi^2(l_2 - l_1)}{T_2^2 - T_1^2} . \quad (3.2)$$

У даному випадку приріст величин  $(l_2 - l_1)$  і  $(T_2^2 - T_1^2)$  беруть безпосередньо з прямої  $T^2(l)$ , яка узагальнює велику кількість експериментальних точок. Через це точність при обчисленнях прискорення сили тяжіння суттєво підвищується.

#### 4. Опис дослідної установки

Для виконання лабораторної роботи використовують спеціально сконструйований прилад (рис.4.1), що складається з кронштейна 1, на якому закріплюють підйомний механізм 2 з фіксатором 3, а також лінійка 5, вздовж якої рухається повзунок 7, який необхідний для відліку довжини маятника.

До рухомої частини підйомного блока, що забезпечує плавне регулювання довжини маятника, підвішена на довгій нитці 4 кулька 6, період коливань якої визначають електронним (або електричним) секундоміром.

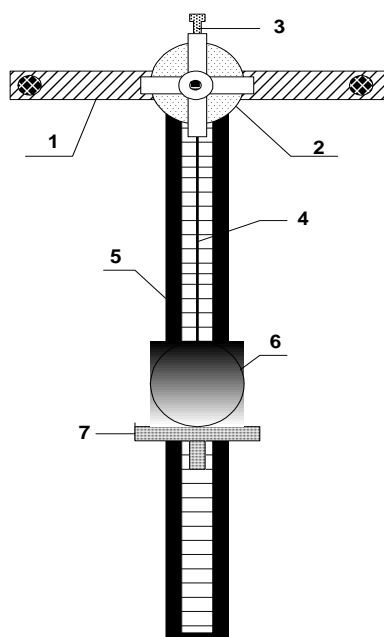


Рис. 4.1

## 5. Послідовність виконання роботи

**5.1** Установити кульку у верхній частині вимірювальної шкали і за допомогою повзунка 7 визначити положення її нижньої частини  $l_1$  (рис.4.1).

**5.2** Відвести кулю на  $2\div 8^\circ$  від положення рівноваги і відпустити. Визначити за допомогою секундоміра час  $t_1$  для  $n = 30$  повних коливань (за одним з крайніх положень). Досліди повторити двічі. Обчислити період коливань маятника за формулою

$$T_1 = \frac{t_{cp}}{n}. \quad (5.1)$$

**5.3** За допомогою підйомного блока 2 збільшити довжину маятника на  $20\div 25$  см. Записати  $l_2$ . Повторити п. 5.1-5.2 та обчислити період коливань  $T_2$ :

$$T_2 = \frac{t_{cp}}{n}. \quad (5.2)$$

**5.4** Продовжити аналогічні досліди іще при трьох значеннях  $l$  маятника, використовуючи всю його наявну довжину  $0,25\div 1,5$ м. Визначити відповідно величини  $l_i$  і  $T_i$  та занести їх до таблиці 5.1.

**5.5** За відомими значенням  $l_i$  та  $T_i^2$  побудувати графік залежності  $T^2 = f(l)$  так, як це зображено на рис.5.1.

**5.6** З побудованого графіка треба взяти для двох довільних точок значення  $\Delta(l)$  і  $\Delta(T^2)$  та, скориставшись виразом (3.2), знайти величину  $g$ .

**5.7** Розрахувати абсолютну  $\Delta g$  та відносну  $\Delta g/g$  похибки за формулами (5.3) і (5.4) та записати кінцевий результат. Усі дослідні дані занести до табл. 5.1.

Таблиця 5.1

№ вимірювань	$l_i$	$t_i$	$t_{cp}$	$T_i$	$T_i^2$	$\Delta l$	$\Delta t$	$\Delta T$	$g_{cp}$	$\Delta g$	$\Delta g/g$
	м	с	с	с	с <sup>2</sup>	м	с	с	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	%
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											



Відносну й абсолютну похибки при обчисленні прискорення  $g$  визначають за формулами:

$$\frac{\Delta g}{g} = \left( \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{l_1 - l_2} + \frac{2T_1 \Delta T_1 + 2T_2 \Delta T_2}{T_1^2 - T_2^2} \right) \cdot 100\%, \quad (5.3)$$

$$\Delta g = g \left( \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{l_1 - l_2} + \frac{2T_1 \Delta T_1 + 2T_2 \Delta T_2}{T_1^2 - T_2^2} \right), \quad (5.4)$$

де величини  $\Delta l$  і  $\Delta T$  являють собою інструментальні похибки вимірювальних приладів, які використовують в дослідях. Зауважимо, що при обрахуванні величини  $\Delta T$  слід брати величину  $\Delta t = 0.2 \text{ с}$ . Це зумовлено тим, що людина не може роздільно сприйняти проміжки часу, менші за  $0,1 \text{ с}$ . Тому при вимірюванні часу секундоміром з ручним вмиканням, експериментатор буде двічі допускати помилки по  $0,1 \text{ с}$  (у моменти його ввімкнення і вимкнення). Отже незалежно від точності секундоміра максимальна похибка становитиме  $0,2 \text{ с}$ . Кінцевий результат слід записати у вигляді:

$$g = g_{\text{ср}} \pm \Delta g. \quad (5.5)$$

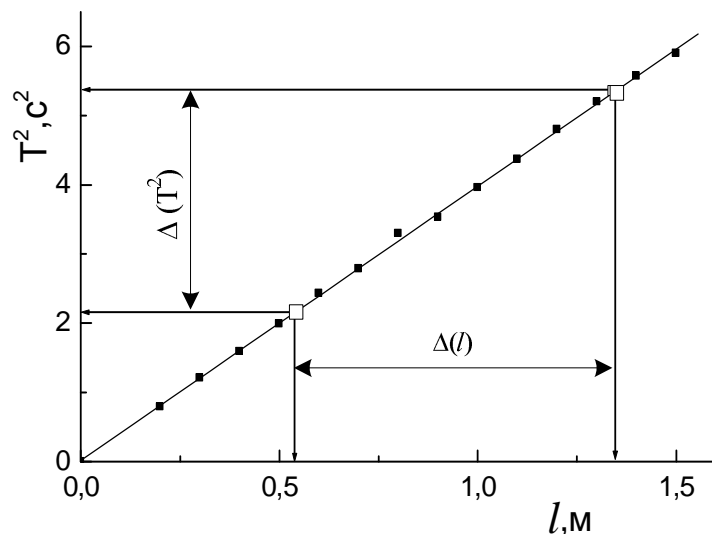


Рис. 5.1

## 6. Контрольні запитання

1. Що називають математичним маятником?
2. Від чого залежить період коливань математичного маятника?
3. Що являє собою період коливань маятника?
4. Чому коливання називають гармонічними і чим вони викликаються?
5. Від чого залежить величина прискорення сили тяжіння?
6. Чому кут відхилення маятника від положення рівноваги має бути малим ?
7. Якими силами визначають на поверхні Землі прискорення вільного падіння?
8. Як залежить прискорення сили тяжіння від висоти підйому тіла над поверхнею Землі?

*Навчальне видання*

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до виконання лабораторних робіт  
з курсу

***ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА***

розділ «МЕХАНІКА»

*(для студентів I курсу денної та заочної форм навчання бакалаврів  
за напрямками підготовки 6.050702 «Електромеханіка»,  
6.050701 «Електротехніка та електротехнології»)*

Укладач **ПЕТЧЕНКО** Олександр Матвійович

Відповідальний за випуск *С. І. Назаренко*

Редактор Д. Ф. Курильченко

Комп'ютерне верстання *О. А. Балашова*

План 2012, поз. 275 М

---

Підп. до друку 13.03.2012

Друк на ризографі.

Зам. №

Формат 60 x 84/16

Ум. друк. арк. 2,9

Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: [rectorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rectorat@ksame.kharkov.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4064 від 12.05.2011 р.